2022年09月06日作业答案

例1　(1)由普朗克黑体辐射公式分别计算守恒量$\frac{\nu_{max}}{T}$和守恒量λ_{max}T的值，其中ν_{max}和λ_{max}分别是$\rho_v(T)$的峰值频率和$\rho_\lambda(T)$的峰值波长；(2)计算乘积$\nu_{max}\lambda_{max}$。

解：(1)令$x=\frac{h\nu}{k_BT}$，利用$\rho_v d\upsilon=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}\,d\upsilon$，计算$\rho_\upsilon(T)$对$\upsilon$导数，由$\frac{d}{d\upsilon}\rho_\upsilon(T)=\frac{d}{d\upsilon}[\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}(e^x-1)^{-1}]$

$$=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}(e^x-1)^{-1}[3-xe^x((e^x-1)^{-1})]$$

$$=0$$

由此可以得到e^{-x}=1−$\frac{x}{3}$，此方程的非零解为x=2.821，即$e^{\frac{h\nu}{k_BT}}=2.821.$

所以$\frac{\nu_{max}}{T}=2.821\frac{k_B}{h}=5.88\times10^{10}HZ/K.$　　　　(a)

这就是守恒量$\frac{\nu_{max}}{T}$的值。

令y=$\frac{hc}{\lambda k_BT}$，计算$\rho_\lambda(T)$对λ的导数，由

$$\frac{d}{d\lambda}\rho_\lambda(T)=\frac{d}{d\lambda}[\frac{8\pi hc}{\lambda^5}(e^y-1)^{-1}]$$

$$=-\frac{8\pi hc}{\lambda^6}(e^y-1)^{-1}[5-ye^y(e^y-1)^{-1}]$$

$$=0$$

由此可以得到e^{-y}=1−$\frac{y}{5}$，　此方程的非零解为y=4.965，所以我们可以得到λ_{max}T=$\frac{1}{4.965}\frac{hc}{k_B}$=2.897$\times10^{-3}m\cdot k.$　　　　(b)

这就是守恒量λ_{max}T的值，这就是维恩位移定律。

(2)由式子(a)和(b)得到

$$\lambda_{max}\mathrm{T}\cdot\nu_{max}=\nu=\frac{2.821}{4.965}c=1.703\times10^8m/s.$$

例2　由普朗克黑体辐射公式推导出斯特藩-波尔兹曼定律。

解：利用黑体辐射公式求$\rho_v(T)$对ν的积分：

$$\mathrm{E(T)} = \frac{8\pi h}{C^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)^{-1}} d\nu$$

令 x=$\frac{h\nu}{k_B T}$, 可以得到

$$\mathrm{E(T)} = \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \frac{8\pi h}{C^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} dx$$

其中的积分为：$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1} dx$=$\int_0^\infty x^3 e^x \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} dx$

=$\int_0^\infty x^3 e^x \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+1)x}\, dx$

=$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-(n+1)x} dx$

=$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^4} \int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$

=6$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^4}$

=$\frac{\pi^4}{15}$

所以$\mathrm{E(T)} = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3}T^4$, 这就是斯特藩–波尔兹曼定律，它的理论值 $\sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3}$。