2022年09月27日作业答案

题目1　在 t=0 时刻一粒子由下面的波函数描述

$$\psi(x,0)=\begin{cases} A\frac{x}{a} & (0\le x\le a)\\ A\frac{(b-x)}{(b-a)} & (a\le x\le b)\\ 0 & (其他地方)\end{cases}$$

式中，A，a和 b 是常数。

(a)　归一化ψ(即求出以a和 b 表示的 A)。

(b)　作为 x 的函数画出$\psi(x,0)$的草图。

(c)　在 t=0 时刻在哪里最有可能发现粒子？

(d)　在a 的左边发现粒子的概率是多少？对 b=a 和 b=2a 两种极限情况验证你的结果。

(e)　x 的期望值是多少？

解：(a)

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\left[\int_0^a\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$=|A|^2\left[\frac{a}{3}+\frac{(b-a)}{3}\right]=|A|^2\frac{b}{3}$$

所以

$$A=\sqrt{\frac{3}{b}}$$ （不考虑可能的相因子，以后都是如此）

(b) $\Psi(x,0)$的示意图如图 1-2 所示。

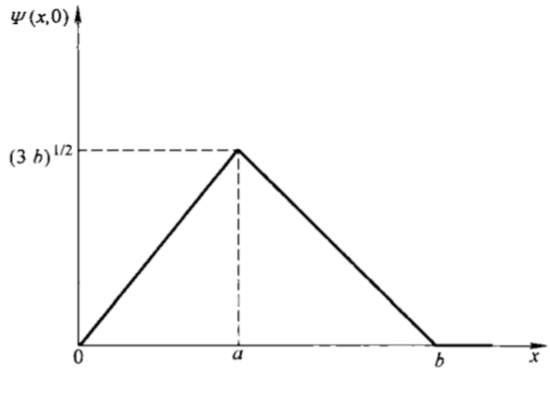

图　1-2

(c)

在 $x=a$ 处，$|\Psi(x,0)|^2$ 有最大值，所以在此处发现粒子的概率最大。

(d)

$$P(x<a)=\int_0^a|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=\frac{3}{b}\int_0^a\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$$

当 $b=a$ 时，在 b 左边发现粒子的概率是 1；当 $b=2a$ 时，发现粒子的概率是 1/2。

(e)

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,0)x\Psi(x,0)\mathrm{d}x=\frac{3}{b}\left[\int_0^a\frac{x^3}{a^2}\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{x(b-x)^2}{(b-a)^2}\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{2a+b}{4}$$

题目 2 一个质量为 m 的粒子处于态

$$\psi(x,t)=Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$$

式中，A 和 a 为正的实数。

(a) 求出 A。

(b) 对什么样的势能函数 V(x),这个ψ满足薛定谔方程。

(c) 计算 x, x^2, p 和 p^2的期望值。

(d) 求出σ_x 和 σ_p ,它们的积满足测不准关系吗？

解：(a) 由归一化

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2amx^2/\hbar)\mathrm{d}x=|A|^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{2am}}$$

所以
$$A=\left(\frac{2am}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

(b) 在第 2 章，我们将讨论一维谐振子，你将发现势能$\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 会得到这样的波函数解。不过现在我们打算直接从薛定谔方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\Psi(x,t)$$

得到对应的势能。把所给的波函数代入薛定谔方程，经过对 t 和 x 的求导运算后，得到

$$\hbar a\Psi(x,t)=-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-\frac{2am}{\hbar}\right)+\left(-\frac{2amx}{\hbar}\right)^2\right]\Psi(x,t)+V(x)\Psi(x,t)$$

两边消去相同的项后，得到

$$V(x)=2a^2mx^2$$

注意：如果令 $a=\omega/2$。则 $V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，所给的波函数其实就是一维谐振子的基态，对应的基态能量是 $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega=\hbar a$，在第 2 章将会看到这些结果。

(c)

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x|\Psi|^2\mathrm{d}x=0(\text{被积函数是奇函数})$$

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\Psi|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-2amx^2/\hbar}\mathrm{d}x$$

$$=2|A|^2\frac{1}{2^2(2am/\hbar)}\sqrt{\frac{\pi}{(2am/\hbar)}}=\frac{\hbar}{4am}$$

$$\langle p\rangle=m\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=0$$

$$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(-\mathrm{i}\hbar\,\partial/\partial x)^2\Psi\mathrm{d}x=-\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\left[-\frac{2am}{\hbar}\left(1-\frac{2amx^2}{\hbar}\right)\right]\Psi\mathrm{d}x$$

$$=2am\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi|^2\mathrm{d}x-(2am)^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\Psi|^2\mathrm{d}x$$

$$=2am\hbar-(2am)^2\langle x^2\rangle=2am\hbar-(2am)^2\frac{\hbar}{4am}=am\hbar$$

(d)

$$\sigma_x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\sqrt{\frac{\hbar}{4am}}$$

$$\sigma_p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\sqrt{am\hbar}$$

$$\sigma_x\sigma_p=\sqrt{\frac{\hbar}{4am}}\cdot\sqrt{am\hbar}=\frac{\hbar}{2}$$

这刚好是不确定原理的下限。

题目 3. 证明对任何两个同时满足薛定谔方程（归一化的）的解Ψ_1 和 Ψ_2有 $\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1^*\Psi_2dx=0$

证：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1^*\Psi_2\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial t}\Psi_2+\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}x$$

因为两个波函数满足具有相同势函数的薛定谔方程，所以

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2}+V(x)\Psi_1^*$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+V(x)\Psi_2$$

代入前面的式子

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1^*\Psi_2\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2}-\frac{V(x)}{\mathrm{i}\hbar}\Psi_1^*\right]\Psi_2+\Psi_1^*\left[-\frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}+\frac{V(x)}{\mathrm{i}\hbar}\Psi_2\right]\right\}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\frac{\partial^2\Psi_1^*}{\partial x^2}\right)\Psi_2+\Psi_1^*\left(-\frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}\right)\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\Psi_2-\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}}\left(\frac{\partial\Psi_1^*}{\partial x}\Psi_2-\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0\end{aligned}$$

其中最后一步利用了 $x=\pm\infty$ 时，波函数为零的条件。

题目 4　一粒子由下述波函数描述（t=0 时刻）

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}A(a^2-x^2) & (-a\le x\le a)\\ 0 & (其他)\end{cases}$$

(a)　确定归一化常数 A。

(b)　x 的期望值(t=0 时刻)是多少？

(c)　p 的期望值(t=0 时刻)是多少？(注意：你不能从 $\langle p\rangle=md\langle x\rangle/dt$ 得到它，为什么？)

(d)　求出 x^2 的期望值。

(e)　求出 p^2 的期望值。

(f)　求出 x 的不确定(即σ_x)。

(g)　求出 p 的不确定(即σ_p)。

(h)　验证你所得到的结果符合不确定原理。

解：（a）归一化

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2\mathrm{d}x$$

$$=|A|^2\int_{-a}^{a}(a^4-2a^2x^2+x^4)\mathrm{d}x=|A|^2\frac{16a^5}{15}$$

$$A=\sqrt{\frac{15}{16a^5}}$$

（b）

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-a}^{a}x(a^4-2a^2x^2+x^4)\mathrm{d}x=0$$

注意：被积函数是奇函数，所以很容易得出积分结果，下面动量的期望值也是如此。

（c）

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,0)\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\hbar A^2\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)(-2x)\mathrm{d}x=0$$

注意：因为本题仅给出 $t=0$ 的波函数，我们求出的仅是坐标在 $t=0$ 时刻的期望值，无法知道 $\langle x\rangle$ 随时间的变化规律，所以不能从 $\langle p\rangle=m\mathrm{d}\langle x\rangle/\mathrm{d}t$ 得到动量的期望值。

（d）

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-a}^{a}x^2(a^4-2a^2x^2+x^4)\mathrm{d}x$$

$$=|A|^2\frac{16a^7}{105}=\frac{a^2}{7}$$

（e）

$$\langle p^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,0)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi(x,t)\mathrm{d}x=-\hbar^2A^2\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)(-2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{3}\hbar^2a^3A^2=\frac{8}{3}\hbar^2a^3\frac{15}{16a^5}=\frac{5\hbar^2}{2a^2}$$

（f）

$$\sigma_x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}=\frac{a}{\sqrt{7}}$$

（g）

$$\sigma_p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=\frac{\hbar}{a}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

（h）

$$\sigma_x\sigma_p=\hbar\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{10}{7}}>\frac{\hbar}{2}$$

题目 5. 设$[q,p]=i\hbar, f(q)$是 q 的可微函数，证明：

（1） $[q,p^2 f]=2i\hbar pf$

（2） $[q,pfp]=i\hbar(fp+pf)$

（3） $[q,fp^2]=2i\hbar fp$

（4） $[p,p^2 f]=\frac{\hbar}{i}p^2 f'$

（5） $[p,pfp]=\frac{\hbar}{i}pf'p$

（6） $[p,fp^2]=\frac{\hbar}{i}f'p^2$

（1） $\boldsymbol{\left[q,p^2 f(q)\right]=2i\hbar pf}$.

（证明）根据题给的对易式及$\left[q,f(q)\right]=0$;

$$\left[q,p^2 f\right]=qp^2 f-p^2 fq=qp^2 f-p^2 qf$$

$$\boldsymbol{=qppf-p(pq)f=qppf-p(qp-i\hbar)f}$$

$$\boldsymbol{=(qp-pq+\hbar i)pf=2\hbar ipf}$$

（2） $\boldsymbol{[q,pf(q)p]=i\hbar(fq+pf)}$（证明）同前一论题

$$[q,pfp]=qpfp-pfpq=qpfp-pf(qp-hi)$$

$$=qpfp-pfpq+hipf=qpfp-pqfp+hipf$$

$$=(qp-pq)fp+hipf=hi(fp+pf)$$

（3）$[q,f(q)p^2]=2i\hbar fp$　[证明]同前一题论据：

$$[q,fp^2]=qfpp-fppq=fqpp-fppq$$

$$=fqpp-fp(qp-\hbar i)=fqpp-fpqp+\hbar ifp$$

$$=f(qp-pq)p+\hbar ifp=2\hbar ifp$$

（4）$[p,p^2f(q)]=\frac{\hbar}{i}p^2f'$　[证明]根据题给对易式外，另外应用对易式

$$[p,f(q)]=\frac{\hbar}{i}f' \qquad (f')\equiv\frac{df}{dq}$$

$$[p,p^2f]=p^2f-p^2fp=p^2(pf-fp)=p^2[p,f]=\frac{\hbar}{i}p^2f'$$

（5）$[p,pf(q)p]=\frac{\hbar}{i}pf'p$　（证明）论据同（4）：

$$[p,pfp]=p^2fp-pfp^2=p(pf-fp)p=\frac{\hbar}{i}pf'p$$

（6）$[p,f(q)p^2]=\frac{\hbar}{i}f'p^2$　（证明）论据同（4）：

$$[p,fp^2]=pfp^2-fp^2=(pf-fp)p^2=\frac{\hbar}{i}f'p^2$$

题目 6. 定义反对易式$[A,B]_+=AB+BA$,证明

$$[AB,C]=A[B,C]_+-[A,C]_+B$$

$$[A,BC]=[A,B]_+C-B[A,C]_+$$

并与下列二式比较

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$$

$$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$$

上列代数恒等式在计算 Fermi 子算符的对易式时极为有用

证：

$$\begin{aligned}[AB,C]&=A[B,C]+[A,C]B\\&=ABC-ACB+ACB-CAB=A(BC+CB)-(AC+CA)B\\&=A[B,C]_+-[A,C]_+B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[A,BC]&=[A,B]C+B[A,C]=ABC-BAC+BAC-BCA\\&=(AB+BA)C-B(AC+CA)=[A,B]_+C-B[A,C]_+\end{aligned}$$

题目 7 设 $F[x,p]$是x_k和p_k的整函数，证明

$$[p_k,F]=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial F}{\partial x_k},[x_k,F]=i\hbar\frac{\partial F}{\partial p_k}$$

整函数是指 F[x,p]可以展开成

$$F[x,p]=\sum_{m,n}(\sum_{k,l=1}^{3}C_{kl}^{mn}\,x_k^m p_l^n)$$

C_{kl}^{mn}是数值函数。

证：（1）先证 $\left[p, x^{m}\right]=-mi\hbar x^{m-1}$，　　$\left[x, p^{n}\right]=ni\hbar p^{n-1}$。

$$\begin{aligned}\left[p, x^{m}\right] &= x^{m-1}[p, x]+\left[p, x^{m-1}\right]x \\ &= -i\hbar x^{m-1}+x^{m-2}[p, x]x+\left[p, x^{m-2}\right]x^{2} \\ &= -2i\hbar x^{m-1}+x^{m-3}[p, x]x^{2}+\left[p, x^{m-3}\right]x^{3} \\ &= -3i\hbar x^{m-1}+\left[p, x^{m-3}\right]x^{3}=\cdots \\ &= -(m-1)i\hbar x^{m-1}+\left[p, x^{m-(m-1)}\right]x^{m-1} \\ &= -(m-1)i\hbar x^{m-1}-i\hbar x^{m-1}=-mi\hbar x^{m-1}\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}\left[x, p^{n}\right] &= p^{n-1}[x, p]+\left[x, p^{n-1}\right]p \\ &= i\hbar p^{n-1}+p^{n-2}[x, p]p+\left[x, p^{n-2}\right]p^{2} \\ &= 2i\hbar p^{n-1}+\left[x, p^{n-2}\right]p^{2}=\cdots \\ &= ni\hbar p^{n-1}\end{aligned}$$

现在，

$$\begin{aligned}[p, F] &= \left[p, \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m} p^{n}\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}\left[p, x^{m}\right]p^{n} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}\left(-mi\hbar x^{m-1}\right)p^{n}\end{aligned}$$

而　$$-i\hbar \frac{\partial F}{\partial x}=\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}\left(-mi\hbar x^{m-1}\right)p^{n}$$ 。

$\therefore$　$$[p, F]=-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{F}$$

又

$$\begin{aligned}[x, F] &= \left[x, \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m} p^{n}\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left[x, p^{n}\right] \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left(ni\hbar p^{n-1}\right)\end{aligned}$$

而　$$i\hbar \frac{\partial F}{\partial p}=\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} x^{m}\left(ni\hbar p^{n-1}\right)$$

$\therefore$　$$[x, F]=i\hbar \frac{\partial}{\partial p}\mathrm{F}$$