2022年10月24日作业答案

题目1 氢分子H_2中二原子间的振动相当于一个谐振子，其等效劲度系数为$k = 1.13 \times 10^3 N/m$，单个氢原子质量为$m = 1.67 \times 10^{-27} kg$。当此谐振子由某一激发态跃迁到相邻下一个激发态时，所发射的光子的能量和波长各是多少？

解 振子的频率是

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.13 \times 10^3}{1.67 \times 10^{-27}}} = 8.2 \times 10^{14}\,\text{Hz} \tag{5.2.3}$$

能级间隔为

$$\hbar\omega = 1.05 \times 10^{-34} \times 8.2 \times 10^{14} = 8.61 \times 10^{-20}\,\text{J} = 0.54\,\text{eV} \tag{5.2.4}$$

这就是谐振子由某一激发态跃迁到相邻下一个激发态所发射的光子能量。相应的光子波长为

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{8.2 \times 10^{14}} = 2.3 \times 10^{-6}\,\text{m} = 2300\,\text{nm} \tag{5.2.5}$$

它处于红外波段。

题目2 求量子谐振子的第一激发态的本征函数。

解 让我们利用坐标算符 $\hat{x}$ 和动量算符 $\hat{p}$ 定义以下两个算符：

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{5.4.1a}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right) \tag{5.4.1b}$$

如果用降阶算符 a 作用于能量最低的本征态 ψ_0（基态），则有

$$a\psi_0 = 0 \tag{5.4.15}$$

我们可以利用式(5.4.15)来确定 $\psi_0(x)$。事实上，按照 a 的定义式(5.4.1a)和 $\hat{p}$ 的定义式(2.1.31)，式(5.4.15)变为

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_0 = 0 \tag{5.4.16}$$

其中，常数 α 由式(5.1.10)表示。由方程(5.4.16)容易解出

$$\psi_0(x)=A_0\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right) \tag{5.4.17}$$

对它归一化：

$$A_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\mathrm{d}x=A_0^2\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}=1\Rightarrow A_0=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \tag{5.4.18}$$

因此归一化的基态为

$$\psi_0(x)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right) \tag{5.4.19}$$

至此我们已经得出了谐振子基态的所有结果。现在利用式(5.4.14)的升阶算符可以生成第一激发态

$$\psi_1(x)=A_1a^+\psi_0(x) \tag{5.4.22}$$

利用 a^+ 的定义式(5.4.1b)及式(5.4.22)和式(5.4.19)，得到

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=A_1\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_0(x)\\&=A_1\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)\right]\\&=A_1\alpha\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}x\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)\end{aligned}$$

对它归一化：

$$A_1^2\alpha^2\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}x^2\exp(-\alpha^2x^2)\mathrm{d}x=1\Rightarrow A_1=1 \tag{5.4.27}$$

故

$$\psi_1(x)=\alpha\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}x\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right) \tag{5.4.28}$$

这就是量子谐振子的第一激发态的本征函数，与解析法的结果式(5.2.31)相同。

题目 3 一质量为m、带电荷q的谐振子在均匀弱电场$\mathcal{E}$作用下运动，电场沿x轴正方向，求带电谐振子的本征能量和本征函数。

解 带电谐振子(charged harmonic oscillator)受到弱电场的作用，具有附加能量$-q\mathcal{E}x$，可以称为微扰谐振子(perturbed harmonic oscillator)，它的哈密顿算符为

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2-q\mathcal{E}x \tag{5.4.54}$$

利用式(5.4.11)和式(5.4.2a),式(5.4.54)可以写为

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(a^{+}a+\frac{1}{2}\right)-q\mathscr{E}C(a+a^{+}) \tag{5.4.55}$$

其中,C 由式(5.4.3a)表示。现在对式(5.4.55)进行如下变换:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\hbar\omega\left[a^{+}a+\frac{1}{2}-\frac{q\mathscr{E}C}{\hbar\omega}(a+a^{+})\right]\\&=\hbar\omega\left[(a^{+}-a_0)(a-a_0)+\frac{1}{2}\right]-\frac{q^2\mathscr{E}^2}{2m\omega^2}\end{aligned} \tag{5.4.56}$$

其中

$$a_0=\frac{q\mathscr{E}C}{\hbar\omega}=\frac{q\mathscr{E}}{\omega}\sqrt{\frac{1}{2\,\hbar m\omega}} \tag{5.4.57}$$

引入算符

$$b=a-a_0,\quad b^{+}=a^{+}-a_0 \tag{5.4.58}$$

式(5.4.56)变为

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(b^{+}b+\frac{1}{2}\right)-\frac{q^2\mathscr{E}^2}{2m\omega^2} \tag{5.4.59}$$

它与谐振子的哈密顿算符只相差一个常数。现在算符 b 和 b^{+} 满足与式(5.4.10b)相同的对易关系,即$[b,b^{+}]=1$。显然,微扰谐振子的本征能量为

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{q^2\mathscr{E}^2}{2m\omega^2}\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{5.4.60}$$

而本征函数由式(5.4.34)给出为

$$\psi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}(b^{+})^n\psi_0=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^{+}-a_0)^n\psi_0 \tag{5.4.61}$$

由式(5.4.2a)得到

$$x-x_0=[(a-a_0)+(a^{+}-a_0)]C \tag{5.4.62}$$

其中,$x_0=\dfrac{q\mathscr{E}}{m\omega^2}$,这表示:$a\to(a-a_0)$、$a^{+}\to(a^{+}-a_0)$相应于 $x\to(x-x_0)$,因此将谐振子本征函数 $\psi_n(x)$中的 x 换成$(x-x_0)$,即得

$$\psi_n(x)=\left(\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}\mathrm{H}_n[\alpha(x-x_0)]\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2(x-x_0)^2\right] \tag{5.4.63}$$

这就是微扰谐振子的本征函数,它是一个以 $x_0=\dfrac{q\mathscr{E}}{m\omega^2}$ 为平衡位置的谐振子。