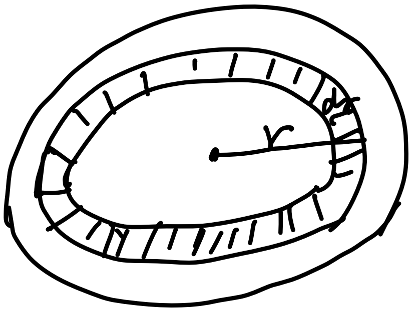


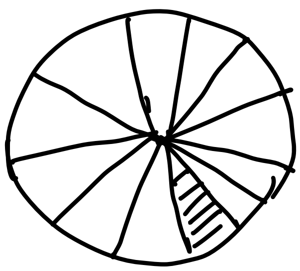
(Nie2K)

面积只能用面积覆盖，不能用环来覆盖

$$dS = 2\pi r\,dr$$

$$S = \int_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2$$

长度量纲 ≠ 面积量纲



(snx)

也不用线段覆盖

只能用小扇形覆盖

$$r\,d\theta\,dr = dS$$

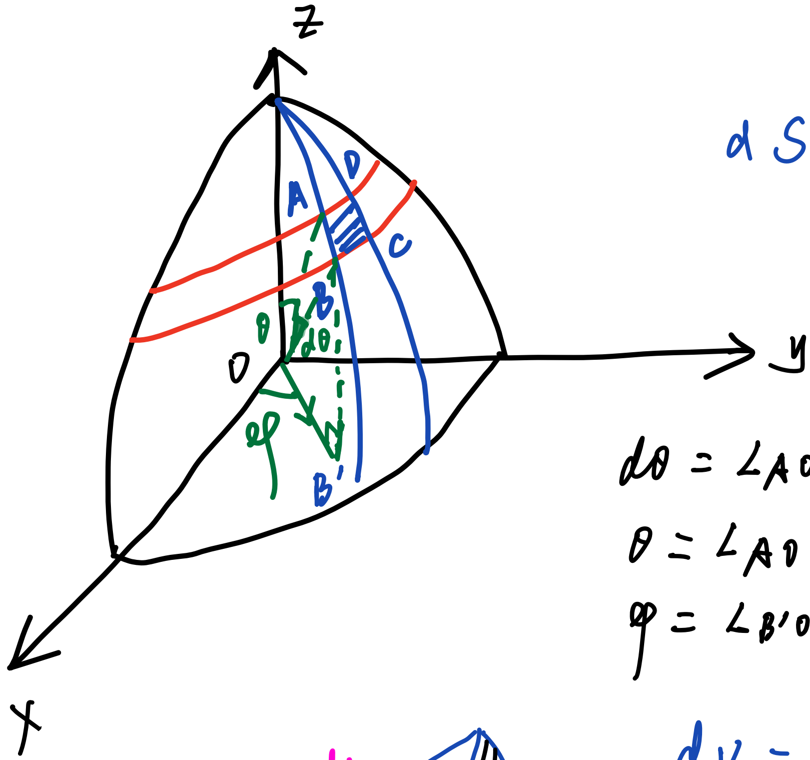
$$\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,d\theta\,dr = \pi R^2$$

同理，体积只能用体积覆盖

线段只能用线段覆盖，不能用点

(有理数填不满数轴)

体积微元： 球坐标



$$dS = |AB|\ |BC|$$

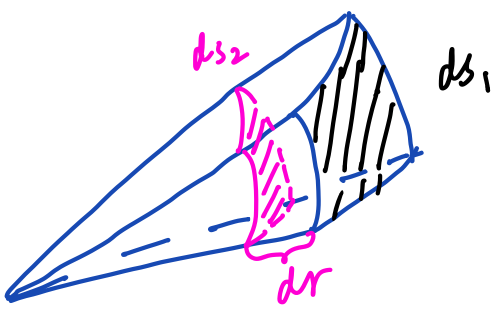
$$= r\,d\theta\ r\sin\theta\,d\varphi$$

$d\theta = \angle AOB$

$\theta = \angle AOz$

$\varphi = \angle B'Ox$

$BB' \perp xOy$



$$dV = dr\,ds$$

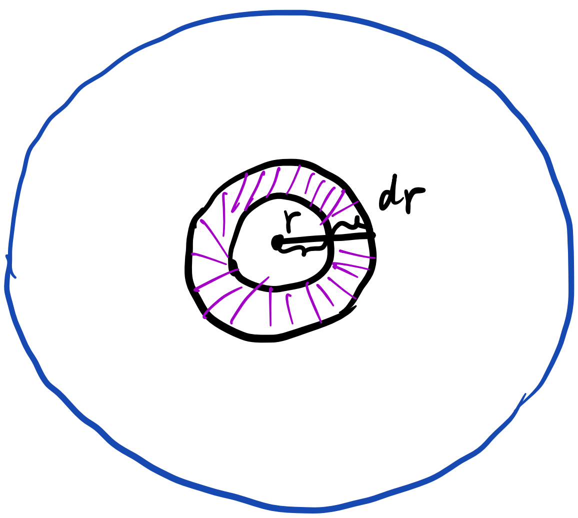
$$= r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

（内壳表面（ds_2）与外壳表面（ds_1）所夹住的体积）

问题：求一个球体的转动惯量，

如果是以下思路所得结果是 $I=\frac{3}{5}mR^2$，

哪里出错？（m：球质量，R：球半径）



黑色表示两个同心球壳，认为 r 从 0 到 R 叠成一个球，

紫色部分为选取微元 dm

这样 $I=\int_0^R r^2\,dm$

$$=\int_0^R r^2\,\rho\,\underbrace{4\pi r^2}_{\text{球的表面积}}\,dr$$

$$=4\pi\rho\,\frac{r^5}{5}\Big|_0^R$$

$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$I = \frac{3}{5} m R^2$$

但是： 正确答案是 $I = \frac{2}{5} m R^2$

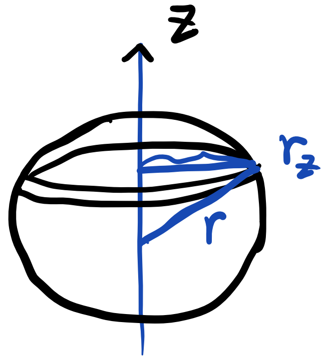
为什么呢？

$$I = \int_0^R r^2 \, dm$$

$$\overset{?}{=} \int_0^R r^2 \rho \underbrace{4\pi r^2}_{\text{球的表面积}} dr$$

问题在这！

转动惯量对于刚体而言，是相对于转动轴而言



$\boxed{r_z，不是\ r！}$

到转轴距离，不是到球心

（转轴均过球心）

比如 相对于 z 轴， $r_z^2 = x^2 + y^2$ ①

同理 x 轴， $r_x^2 = y^2 + z^2$ ②

y 轴， $r_y^2 = x^2 + z^2$ ③

$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 2r^2$

球体各向同性

$$I_x = I_y = I_z$$

$$= \frac{1}{3}(I_x + I_y + I_z)$$

$$= \frac{1}{3} I_t$$

$$I_t = \int_0^R 2 r^2 \, dm$$

$$= 2 \times \frac{3}{5} mR^2$$

$$\therefore I_z = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} mR^2$$

$$= \frac{2}{5} mR^2$$

注：还可以用球坐标体积元直接计算 I_z