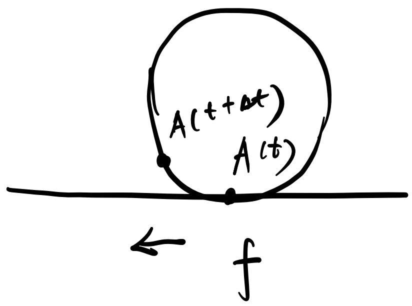
静摩擦：

point contact



如果可以标成不同的颜色
（不同的点） ↓ 转一圈

彩带

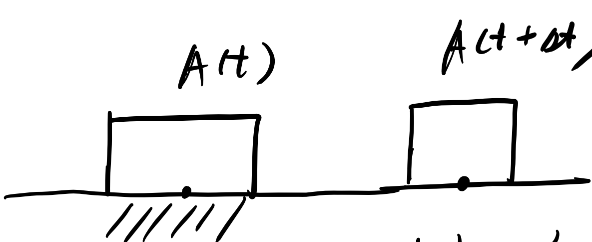
如果可以每个质点
（外点）标记不同的颜色

在转动中， [0, 2π)

A点只在地面上留下了
一个点。

点 → 点

滑动摩擦：相对位移



A点的颜色覆盖一条线

点 → 线

"滚动摩擦"

力偶矩 + 静摩擦(力)

静摩擦力做功吗？

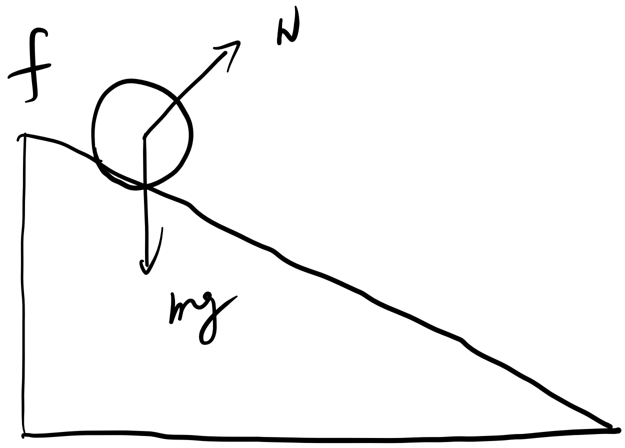
刚性轮在粗糙刚性水平面上，会停吗？

轮子减速：　　静摩擦力使 translation 减速

　　　　　　　力偶矩使 rotation 减速

匹配 rolling without slipping

Cm :



$$\begin{cases} R\alpha = a & ① \quad \text{(geometry)} \\ mg\sin\theta - f = ma & ② \quad \text{(translation)} \\ \underbrace{fR}_{\text{torque}} = I\alpha & ③ \quad \text{(rotation)} \end{cases}$$

check 能量

守恒

$$mg\sin\theta R - fR = maR$$

$$fR = I\alpha$$

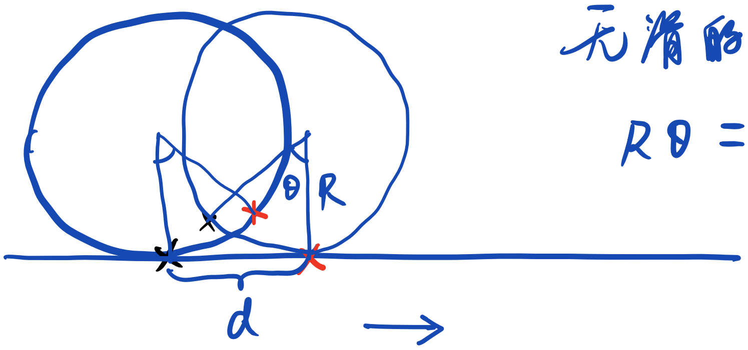
$$mg\sin\theta R = maR + I\alpha$$

$$= maR + \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

$$g\sin\theta = a + \frac{1}{2}R\alpha$$

$$= \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow a = 2g\sin\theta/3$$



无滑的几何约束

$R\theta = d$

rolling without slipping again

与 $\vec{v}$ 反向

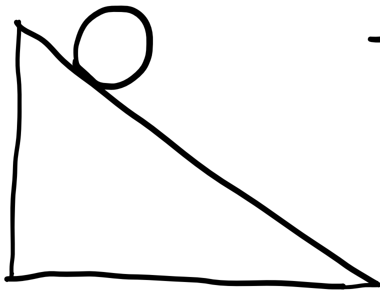
↑

$v - \omega R = 0$

↓

质心下降（沿斜面向下）

接触点速度为0



$\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

contact point $\vec{v} = 0$

可以假设如果没有摩擦力，没有滚动，

那 contact point $\vec{v} \neq 0$，开始相对摩擦.

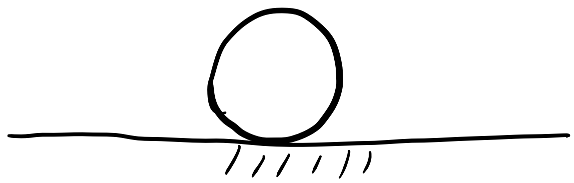
$(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\theta$ 做正功（对转动）

$\vec{F} \cdot d\vec{s}$ 做负功（对平动）

静摩擦力不做功（点 → 点）

$\vec{F}$ 实现平动动能和转动动能的互相转化

回到平面：



$\vec{F}_{fri} = \vec{F}_{合外力}$ （水平方向）

$t=0$，$\vec{v}>0$，$\vec{\omega}=0$

$\vec{F}_{fri} = m\vec{a}_c < 0$，$\vec{R}\times\vec{F}_{fri}$ 开始转动，$\vec{F}_{fri}$ 将实现平动转动能量转换。

匹配 $v=\omega R$，匹配后

$\vec{F}_{fri} = 0$，否则平动减速，

转动加速，$v_c < \omega R$，

$\vec{F}_{fri}$ 将反向。

刚性球在刚性粗糙水平面永远

匀速滚滑（rolling without slipping）

必须引入形变才能减速。

瞬心：瞬时转动中心

（没有相对平动）

任一瞬时 $\exists\ O'$　　刚体围绕此点旋转

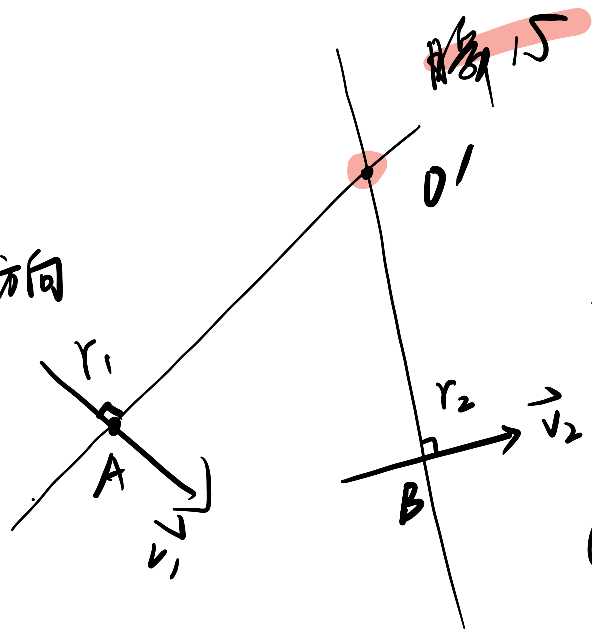
（刚体够大）$\vec{V}_{O'}=0$　　否则刚体要变形（两点间距离改变）

$$\frac{d(v-\omega R)}{dt}=0 \Rightarrow a = R\alpha \text{ (可变)}$$

瞬心：　　$\vec{V}_{瞬心}=0$

速度0　　$\vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ 既是速度，也

加速度为0　　是相对于瞬心的速度



任选两点，速度方向的垂线（分别过这两点）的交点

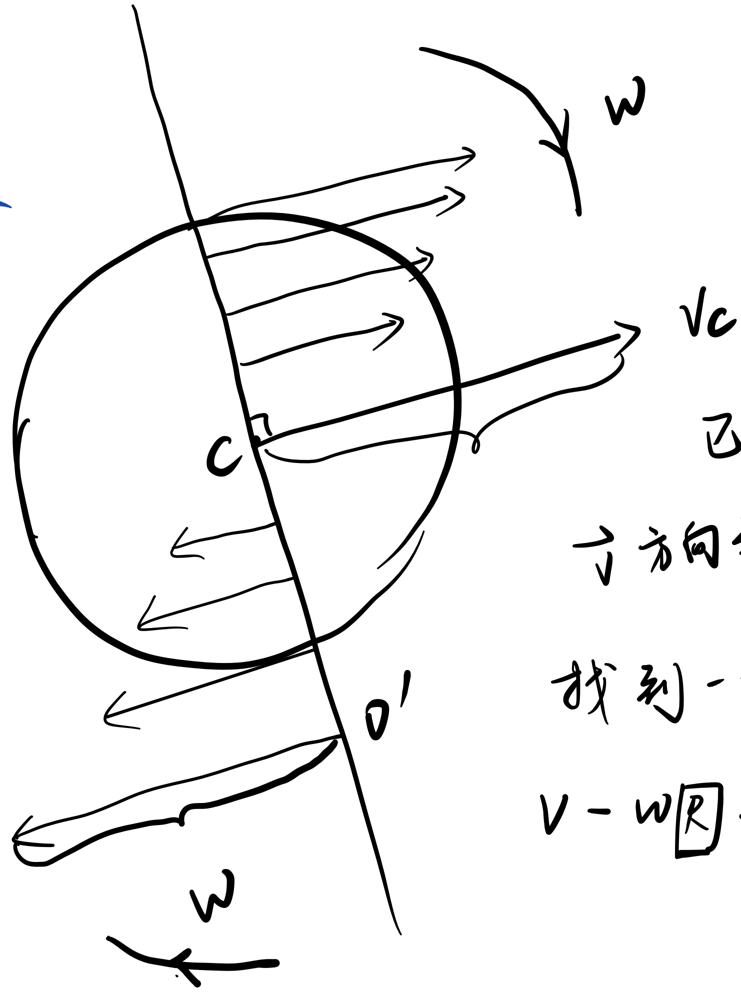
不知道质心，

（相对瞬心只有转动）

A，B 处于同一转动平面

对于刚体，任选两点，它们之间的相对运动只能是转动吗？

瞬心？ 质心？



已知质心C

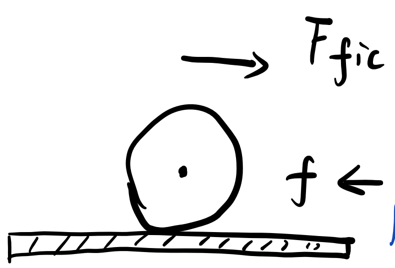
v方向垂线穿过质心

找到一个点 O'

$v - \omega \boxed{R} = 0$

E.g.

板上（非惯性系）向左加速，大小为a，问圆柱体相对地面运动



板上观测者使用 2nd Newton's law

需补假想力 $\vec{F}_{fic} = -m\vec{a}$ （向右）

（选向右为正方向）

$ma - f = ma'$

translation

friction direction：

阻碍相对运动，向左

$$fR = I\alpha$$ rotation

$$= \frac{1}{2}mR^2\alpha$$

向右 $\rightarrow$

"有滚无滑" geometry

$$a' = R\alpha$$

$$\boxed{a' = \frac{2}{3}a}$$

非惯性系 observer:

地面 observer: $-a + a' = -\frac{1}{3}a$

向左加速

注意惯性系与非惯性系的关联

补假想力($\vec{F} = -m\vec{a}$)完成你对自己身处非惯系($\vec{a}$)使用牛顿第二定律的"补丁"。

三个例子比较: $\frac{2}{3}g$, $\frac{2}{3}g\sin\theta$, $\frac{2}{3}a$

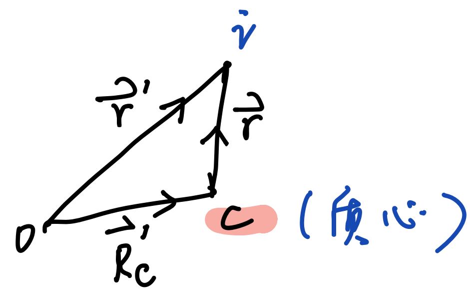
(rolling without slipping for contact surface)

$$\vec{F}_{ex} = m\vec{a}_c = \frac{d\vec{P}_c}{dt}$$

外力

$$\vec{r} \times \vec{F}_{ex} = \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \rightarrow$$ 相对于质心的角动量

$\downarrow$ 相对于质心　　相对于质心的力矩



prime: 相对于 O

without prime: 相对于 C

$$\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$ (总力矩)

$$= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{R}_c') \times \vec{F}_i = \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i} + \boxed{\sum_i \vec{R}_c' \times \vec{F}_i}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{p}_i'}{dt}$$ (总角动量变化)

$$= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{R}_c') \times \frac{d(\vec{p}_i + m_i\vec{v}_c')}{dt}$$

$$= \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}} + \sum_i \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (=0)$$

$$+ \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \frac{m_i d\vec{v}_c'}{dt}}_{=0} + \boxed{\sum_i \vec{R}_c' \times \frac{m_i d\vec{v}_c'}{dt}}$$

$$\sum_i \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{R}_c' \times \frac{\sum_i d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (= m\vec{v}_c)$$

质心系质心速度 $\vec{v}_c = 0$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \frac{m_i\, d\vec{v}_c'}{dt} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \frac{d\vec{v}_c'}{dt}$$

$$\underbrace{m}_{\sum_i m_i} \times \underbrace{\text{质心系质心位矢}}_{\vec{R}_c} = 0$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt}$$

（质心参考系）

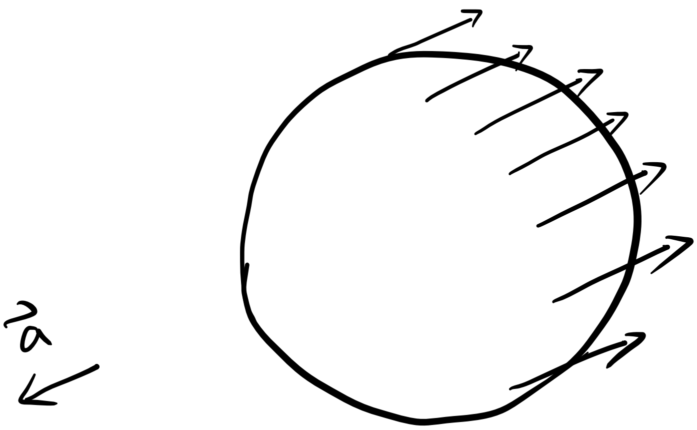
$\vec{r}_i$，$\vec{L}$，$\vec{p}_i$ 均是质心参考系度量。

在质心参考系中，假想力的合力矩不造成对于质心的转动

the rotation axis cross the center mass

2. 质心加速 $\vec{a}$

$\vec{F}^{\,i}_{fic} = -m_i\vec{a}$ for all the mass unit



$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^{\,i}_{fic} = -\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{a}$

$= -\sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{a}$

$= 0$

$\downarrow$ refer to the mass center