第一章 群的基本知识

§1.1 群的概念

1.1.1 群的定义

定义： 在数学对象集合G（$A, B, C, \ldots$）中，定义一种结合法则（群乘）（combination, composition），满足：

（1）封闭性：$A\in G$，$B\in G$，则$AB\in G$

（2）结合律：$A, B, C\in G$, 则$(AB)C = A(BC)$

（3）集合中有单位元素$E\in G$，使得对于任何$A\in G$，恒有$EA=A$

（4）对于任何的$A\in G$，均存在逆元$A^{-1}\in G$，使得$A^{-1}A=E$

问： $\{+1, -1, i, -i\}$ 构成一个群吗？

试讨论以下集合是否构成群：

1 全体整数对于数的加法

2 全体实数对于数的乘法

3 $n \times n$ 幺正矩阵的全体对于矩阵的乘法

4 满足 $detA \neq 0$全部 $n \times n$ 矩阵的集合

1.1.2 群的种类

群

- 有限群（finite group），群元个数有限
- 无限群（infinite group），群元个数无限多
  - 离散群（discrete group）可数
  - 连续群（continuous group）不可数

定义： 有限群中元素的数目称为群的阶（order）

定义： 若群元素之间的结合满足交换律：$AB = BA$，则该群称为Abel群，或对易群（commutation Group）。

1.1.3 群的乘法表

（右因子）

$$
\begin{array}{cc|cccc}
 & & 1 & -1 & i & -i \\
 & G & E & A & B & C \\
\hline
1 & E & 1 & -1 & i & -i \\
-1 & A & -1 & 1 & -i & +i \\
i & B & i & -i & -1 & 1 \\
-i & C & -i & i & 1 & -1
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccc}
G & E & A & B & C \\
E & E & A & B & C \\
A & A & E & C & B \\
B & B & C & A & E \\
C & C & B & E & A
\end{array}
$$

（左因子）

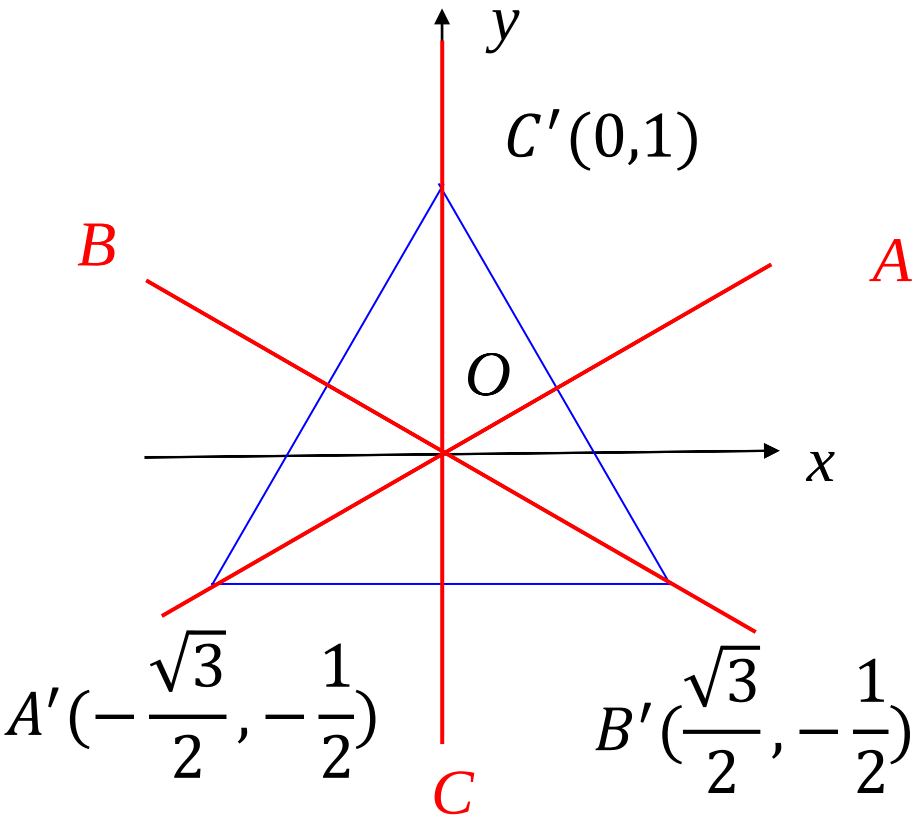
约定：表中元素是竖元素乘横元素，即

$$
\begin{array}{ccc}
G & \cdots & C \\
\vdots & & \vdots \\
D & \cdots & DC
\end{array}
$$

实战正三角形对称群 （D_3）

共有六个元素：恒等变换E，绕三角形中心 O 点逆时针转$2\pi/3$和$4\pi/3$角的变换D和F，三角形分别对 A，B，C 轴转动π角，记为 A，B，C 。

坐标系上取固定的三点A',B',C'，变换前正三角形三顶点 $A_1B_1C_1$与$A'B'C'$ 重合。经变换，A_1, B_1和C_1 的位置发生变化，但总是分别和 A',B'和C' 中的某一点重合。



乘法表

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

1.1.4 有限群的性质

1）重排定理（rearrangement theorem）（它对无限群不成立）

设群 $G\{A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots, A_g\}$ 的阶为 g.

若 $A_i \in G$，则（A_i为G中任意元素）

$$A_iG = \{A_iA_1, A_iA_2, \cdots A_iA_k \cdots A_iA_g\} \equiv G$$

$$GA_i = \{A_1A_i, A_2A_i, \cdots A_kA_i, \cdots A_gA_i\} \equiv G$$

任一元素 $x \in G$ ，必在 A_iG和GA_i中出现，且仅出现一次。

证明：(1)　已知$A_i \in G, x \in G$，则有

$A_i{}^{-1} \in G$，群乘封闭性要求

$A_i{}^{-1}x \in G \Rightarrow x \in A_iG$，必然出现

(2)　x不能出现两次

若　$A_iA_k = x \in G$　，　$A_iA_r = x \in G$

得：

$$A_iA_k = A_iA_r \overset{A_i^{-1}\bullet}{\Rightarrow} A_i^{-1}A_iA_k = A_i^{-1}A_iA_r$$

$\therefore$

$$A_k = A_r$$

出现矛盾，一个群里没有重复元素

2）群元的阶

有限群G，A∈G

$A, AA=A^2, A^3, \cdots, A^m, \cdots A^r, A^{r+1}$ 由于有限，

∴必有 $A^{r+1}=A$，即 $A^rA=A$

∴ $A^r=E$， r 称为该元素的阶

群的阶 Vs 群元的阶

问 $\{+1,-1,i,-i\}$ 中 $i,-i$ 的阶？

r为满足此式的最小整数

定义：由群G的一个最小的群元的集合（如$A_i, A_j, \dots$）及乘法关系就可以构造出一个群。这个最小的群元的集合中的元就称为群G的**生成元**（generator）。群乘关系称作**生成关系**。

D_3群的生成元是D, A

$E = A^2, C = AD, B = DA, F = D^2$

定义：若有限群G中的全部元素可由某个A_i的幂乘得到，则该群称为循环群（cyclic group）。A_i ——该群的生成元

1.1.5 群的实例

1）一阶群：E，满足 $E^{-1}=E$ ， 单位元素

2）二阶群：$\{E,A\}$，$A^{-1}=A$

V_2	E	A
E	E	A
A	A	E

如

V_2	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

所有二阶群的构造均一样

如宇称变换；全同粒子交换（费米）

生成元：A；$\{A, A^2\}$

3）三阶群： $\{E, A, B\}$

唯一可能 $A^2=B$； 同理 $B^2=A$

$\therefore$三阶群唯一可能的乘法表为：

G	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

生成元：A；$\{A, A^2, A^3\}$

B；$\{B, B^2, B^3\}$

一阶、二阶、三阶群均是Abel群，也是循环群。

例： $x^3-1=0$ 的三个根

1， $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 组成三阶群（一般乘法）

例；对称操作 C_3（即绕一固定轴转 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$）也构成三阶群

问： 模（绝对值）为1的复数全体对于数的乘法是否构成群？

Exercise 1: calculate $e^{\sigma_x}, e^{i\sigma_x}$

Exercise2: 比较：

伽利略时空变换群（1+1维），
洛伦兹群（1+1维时空），
二维空间转动群

4）四阶群：$\{E, A, B, C\}$

i）A，B，C中，一个自逆B，另两个互逆A，C。

乘法表示：

C_4	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

$$\Rightarrow \begin{array}{c}\{E, C_4, C_4^2, C_4^3\} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \{+1, +i, -1, -i\}\end{array}$$ ，绕某固定轴转$\left\{2\pi, \pi, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

C_4——**Abel群**

（四阶循环群）

生成元：A；$\{A, A^2, A^3, A^4\}$

C；$\{C, C^2, C^3, C^4\}$

ii）A, B, C均为自逆， $A^{-1} = A, B^{-1} = B, C^{-1} = C$

（注意，不可能有两个自逆）

乘法表为：

V	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

生成元：A, B；$\{A, A^2, B, AB\}$

——Klein四阶群

证明：

$$A^2 = B^2 = C^2 = E$$

$$BA = AB = C$$

（∵若 $AB = A$ 或 $AB = B$，则$A = E$ 或 $B = E$）

同理 $AC = CA = B, BC = CB = A$

V——Abel群（四阶反演群）

群例：矩阵组

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

按矩阵乘法构成一个群其乘法表为：

G_6	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = D$$

$$D \cdot F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

G_6	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

6）置换群（permutation group）

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

原来的位置

新位置

意为：1换成α_1，2换成α_2，…，n换成α_n

S_n：n个物体所有这种可能置换的集合称为置换群

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1, & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ 1 & 2 & & n\end{pmatrix}，\quad E=P_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

这种群对基本粒子的交换对称性有用。

例：S_3：

$$E=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

共 3！个群元素

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

例如：

$$CD=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$
$$=A$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$
$$=D$$

注意：置换是先进行右边的置换，再进行左边置换，即从右到左。

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

∴置换不满足交换律，

是非Abel群

§1.2 子群（subgroup），陪集（coset），

1.2.1 子群

定义： 若某群中的一些元素的集合S按原来的乘法规则也构成群，——S：子群。

$$\left.\begin{array}{l}\text{任何群的单位元素构成子群}\\ G\text{的全体也构成}G\text{的子群}\end{array}\right\}\rightarrow\text{非真子群（平庸子群）}$$

真子群（群元个数大于1小于群阶）：

只需证明封闭性： $SS = S$

例： C_{3v}群中，$\{E,\sigma,\sigma C_3^2,\sigma C_3,C_3^2,C_3\}$ 中 $\{E,C_3^2,C_3\}$构成真子群。

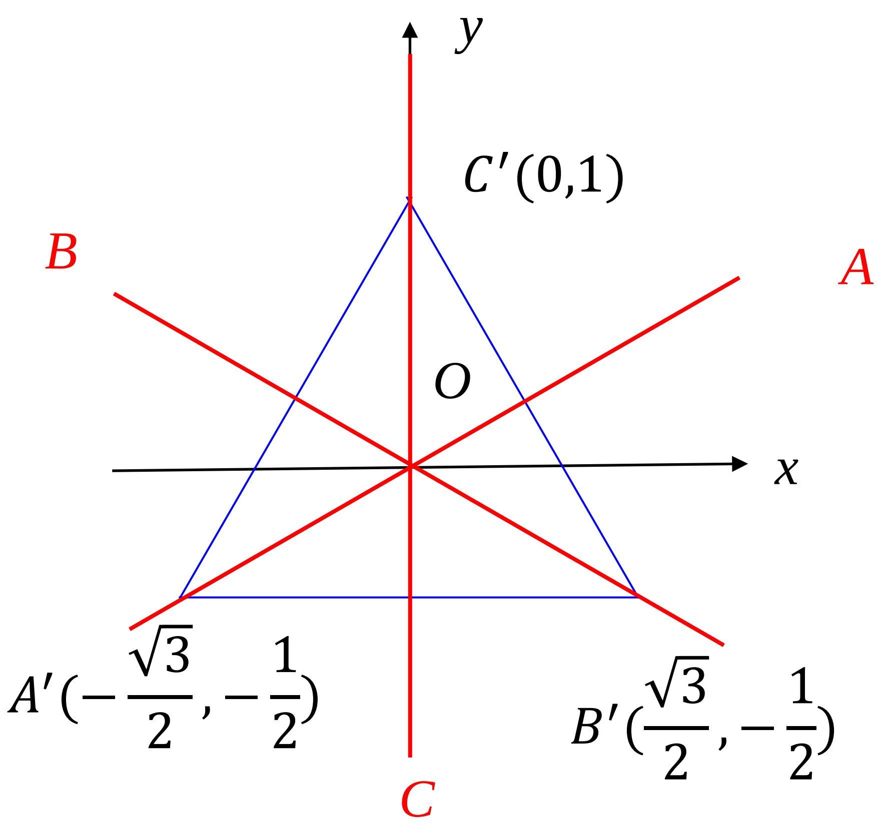
沿A轴反演

顺时针转120°

$\{E,\sigma\}$

$\{E,\sigma C_3^2\}$

$\{E,\sigma C_3\}$



例：实数（加法），单位元为：0

有理数（加法），单位元为：0 ↑子群

整数（加法），单位元为：0 ↑子群　子群链

偶数（加法），单位元为：0 ↑子群

实 ⊃ 有 ⊃ 整 ⊃ 偶

1.2.2 陪集

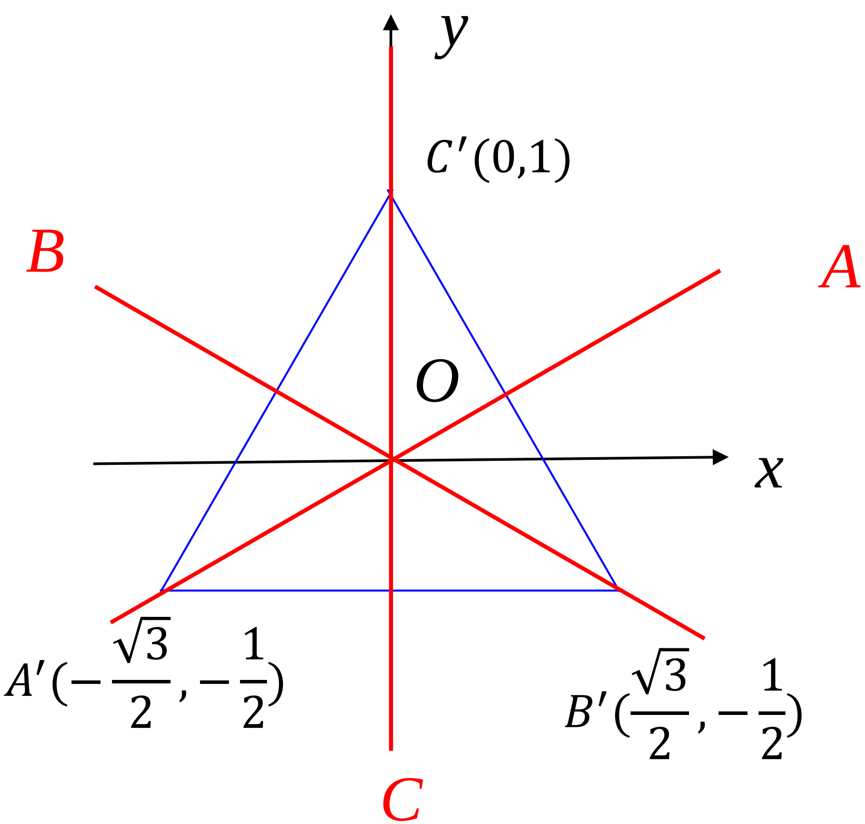
定义： 群中G有一个子群$S\{S_1, S_2, \ldots, S_s\}$，有一群元$x\in G$，$x \notin S$集合$xS=\{xS_1, xS_2, \ldots, xS_s\}$称为$S$的左陪集（left coset），$Sx=\{S_1x, S_2x, \ldots, S_sx\}$称为的右陪集（right coset）.

注： 如果 $x\in S$，则 $xS=Sx=S$为子群本身。

例： C_{3v}群中，子群$\{E, D, F\}$只有一个陪集$\{A, B, C\}$

子群$\{E, A\}$对 B的右陪集为$\{B, D\}$，左陪集为$\{B, F\}$

对C的右陪集为$\{C, F\}$，左陪集为$\{C, D\}$



C_{3v}	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

定理: (1)子群 S 的两个左（右）陪集，或者包含相同的一组元素，或者没有共同元素。

证： $xS\{xS_1, xS_2, \cdots, xS_i, \cdots, xS_s\}$ $yS\{yS_1, yS_2, \cdots, yS_i, \cdots, yS_s\}$

假如： $xS_i = yS_j$, 则有作 $x^{-1}(\quad)S_j^{-1}$

$$x^{-1}xS_iS_j^{-1} = x^{-1}yS_jS_j^{-1} \quad \therefore \quad S_iS_j^{-1} = x^{-1}y$$

$\because$ $S_iS_j^{-1} \in S$ $\therefore$ $x^{-1}y \in S$, $\therefore$ $x^{-1}yS = S$

即 $yS = xS$

(2) 若x不是S 的一个元，那么Sx (xS)不是一个群。

（3）G中的每一个元必然落在子群或某一个左（右）陪集中。

(4) 若子群S 的阶为s，G的阶为g，则每一个左（右）陪集包含s个不同的元，即在集合Sx (xS)的s个元中，没有相同的元存在。

(5) 若$y \in Sx$，则有$Sx = Sy$

角度1：$Sy \in SSx = Sx$
角度2：$y = Ey = S_1 y \in Sy$（子群S的第一个元素即为单位元）
而$y \in Sx$，两个陪集有一个公共元，必然全体相等。

陪集中的任意元都可取为“陪集代表元”

Lagrange定理： 子群S的阶(s)必定能够整除整个群G的阶(g)。

证：若S遍举群G的全部元素，则$s=g$，故$g/s=1$；若不能遍举，

作A_1S，且A_1S与S无共同元素。若$S+A_1S$遍举G所有元素，则

$g/s=2$。若不能，作A_2S，且它与S, A_1S无共同元素，若$S+A_1S+$

A_2S能遍举G，则$g/s=3$。

因为是有限群，总有$G=S+A_1S+A_2S\ldots+A_{i-1}S$

$\therefore \quad g/s=i$ （$i-1$为不同的陪集个数）

例： 证明：若群的阶为素数，则该群必为循环群。

证明：设群的阶为g，若某元素A：$A^r=E$，

若$r<g$，则$g/r=$整数，但g为素数，故必有$r=g$。

注意：陪集并不构成群。

讨论：群阶为5的群的乘法表？

一个群阶为质数的群，必为循环群。

1.3 共轭元素（conjugate）和类（class）

定义： A, $B \in G$ ， $\exists x \in G$ ， 满足$xAx^{-1}=B$，则称B是A的共轭元素（conjugate）。

性质： 1）共轭关系是相互的

$$A = x^{-1}Bx \Rightarrow B = xAx^{-1}$$

2）共轭关系具有传递性

$A, B, C \in G$ ， 若A, B分别与C共轭，$A = xCx^{-1}, B = yCy^{-1}$,

则A和B共轭： $\because A = xCx^{-1} \Rightarrow C = x^{-1}Ax$

由

$$\begin{aligned} B &= y(x^{-1}Ax)y^{-1} = (yx^{-1})A(xy^{-1}) \\ &= (yx^{-1})A(yx^{-1})^{-1}, yx^{-1} \in G \end{aligned}$$

$\therefore$ A和B共轭

3）任何元素与自身共轭：

$$A = EAE^{-1} = A$$
$$A = AAA^{-1} = A$$

定义： 群G中互相共轭的元的完全集合称为类（class），类中元素的数目称为类的阶。 $\{xCx^{-1}=C,\forall x\in G\}$

（相似变换的 $x(\ )x^{-1}$ 中的 x 对类中不同元素是可以不一样的，x要取遍整个G）

∴ 只要给出类中任意一个元素就可求得类中所有元素。

单位元素自成一类，这是因为 $xEx^{-1}=E$

任意x

普遍地，若$A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_j, \ldots A_n$是一类，对任一$x\in G$，$xA_ix^{-1}$必定在集合$\{A_1, \ldots A_n\}$内，但此集合不构成群。

例：三点对称群有三个类：　$C_{3v} \approx S_3$

1）E自成一类，因为它与所有元素可对易

2）D、F组成一类，因 $EDE^{-1}=D, ADA^{-1}=F, BDB^{-1}=F,$

$CDC^{-1}=F, FDF^{-1}=D, DDD^{-1}=D$

3）A，B，C组成一类，因 $ECE^{-1}=C, ACA^{-1}=B, BCB^{-1}=A,$

$CCC^{-1}=C, DCD^{-1}=A, FCF^{-1}=B$

$S_3 \approx C_{3v}$	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

性质： 1）单位元素E自成一类

2）不同的类中没有共同的元

3）除单位元这一类外，其余各类都不是子群

4）Abel群的每个元素自成一类

$$xAx^{-1} = Axx^{-1} = A$$

5）同一类中的所有元素都具有相同的阶。

（n是A元素的级，若A^n=E）

证：若A^n=E，则

$$(xAx^{-1})^n = xAx^{-1} \cdot x\,Ax^{-1} \cdots\cdot xAx^{-1}$$
$$= xA^n x^{-1} = xEx^{-1} = E$$

6）对于矩阵群，同一类中的各元互为相似矩阵，因此，同类中各元具有相同的迹。

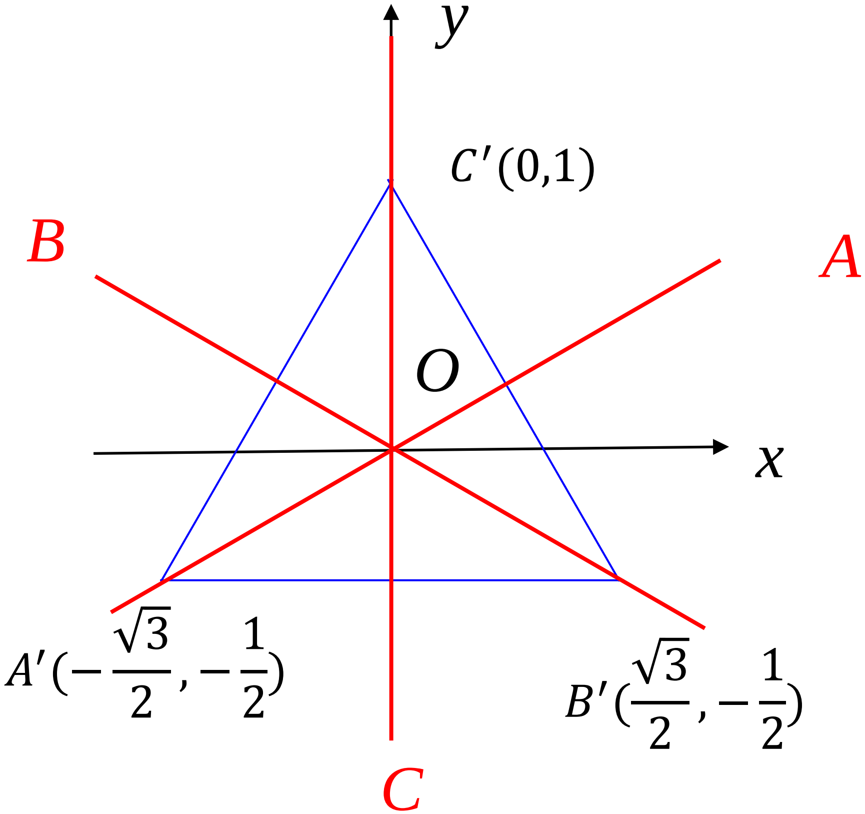
7）若C是群G的一个类，C'是C中所有元的逆的集合，那么，C'也是群G的一个类，称为C的逆类。

已知$xCx^{-1} = C$对$\forall x \in G$成立
则有$xC'x^{-1} = xC^{-1}x^{-1} = (xCx^{-1})^{-1} = C^{-1} = C'$对$\forall x \in G$成立

8）含转动操作的群，转角相同转轴可由群中的元转成一致的，属于同一类。

问：哪些元素同类？

$\{A, B, C\}$
$\{D, F\}$



类的有关定理：

定理一： 若η为由群中若干完整的类构成的集合，即

$$\eta = C_1 + C_2 + \cdots = \sum_k C_k$$

x是群中的任意元，则$x\eta x^{-1} = \eta$成立

逆定理： 任何一个服从关系$x\eta x^{-1} = \eta$，$\forall x \in G$成立的集合η，
必由若干个完整的类构成。

定理二： 两个类的类乘有$C_iC_j=\sum_k \boxed{C_{ijk}} C_k$

为整数，说明C_k在类乘C_iC_j中出现的次数

类乘：两个类的类乘为一个集合，由两个类中的元两两相乘而得，如集合中有重复的元，出现几次算几次

证明：$xC_ix^{-1}=C_i, xC_jx^{-1}=C_j$
则有$C_iC_j=xC_ix^{-1}xC_jx^{-1}=xC_iC_jx^{-1}$
由上述逆定理可知，C_iC_j必由完整的类构成，得证。

练习： 正三角形 D_3 群的类乘

三个类：$C_1 = E, C_2 = \{A, B, C\}, C_3 = \{D, F\}$

$$C_1C_2 = C_2,\ C_1C_3 = C_3,\ C_2C_3 = 2C_2$$
$$C_2C_2 = 3C_1 + 3C_3,$$
$$C_3C_3 = 2C_1 + C_3$$

定理三：

有限群G的阶为g，类C的元数为h_c，则有$g/h_c=$整数

证明：

1，取$x\in G$,取$S\in G$，满足

$SxS^{-1}=x$的所有元的集合$\{S\}=S^x$

证明S^x是一个群

设$S_i,S_j\in S^x$，则$S_ixS_i{}^{-1}=x$，$S_jxS_j{}^{-1}=x$

$S_iS_jx\left(S_iS_j\right)^{-1}=S_iS_jxS_j{}^{-1}S_i{}^{-1}=x$

$\therefore S_iS_j\in S^x$，封闭，构成群。

2，将群G按照S^x的陪集来分解

$G = S^x + R_1S^x + R_2S^x + \cdots + R_{i-1}S^x$

$R_1, R_2, \cdots, R_{i-1}$为陪集代表元

作x的共轭元，$R_1xR_i^{-1}$，$R_2xR_2^{-1}$， $\cdots$， $R_{i-1}xR_{i-1}^{-1}$

证明：全部与x共轭的元素有i个，即$h_c = i$

（1）用属于同一个陪集内的元R_m, R_n做x的共轭元，
则有$R_m x R_m^{-1} = R_n x R_n^{-1}$
$R_m, R_n \in R_m S^x$，
设$R_n = R_m S_g, S_g \in S^x$

$$R_n x R_n^{-1} = R_m S_g x \left(R_m S_g\right)^{-1} = R_m S_g x S_g^{-1} R_m^{-1}$$
$$= R_m x R_m^{-1}$$

（2）反过来，如果$R_m x R_m^{-1} = R_n x R_n^{-1}$，则$R_m, R_n \in R_m S^x$
将$R_m^{-1}()R_m$作用于等式两边, $x = R_m^{-1}(R_n x R_n^{-1})R_m$
$\therefore R_m^{-1} R_n \in S^x \Rightarrow R_n \in R_m S^x$
来自于同一个陪集

（3）$i = h_c = g/s$ ($s: S^x$ 群 的阶)

一个陪集贡献一个与x共轭的元

正三角形 D_3 群的三个类

三个类：$C_1 = E, C_2 = \{A, B, C\}, C_3 = \{D, F\}$

$$\{E\ D\ F\} = s^D = s^F$$

只有一个陪集为$\{A\ B\ C\}$,
选一个陪集代表元，比如A,
$\exists\ ADA^{-1} = F, \qquad AFA^{-1} = D$

1.4 共轭子群（conjugate subgroup）和正规子群（不变子群：normal subgroup ）

定理：若S 为G的子群，则 $\{ASA^{-1}, \forall A \in G\}$ 是一个子群，称作群 G 的共轭子群。

证：$H_1, H_2 \in S$，作 $H'_1 = AH_1A^{-1}$, $H'_2 = AH_2A^{-1} \in AGA^{-1}$

1）封闭性：$A\underbrace{H_1H_2}_{\in S}A^{-1} = AH_1A^{-1}AH_2A^{-1} = H'_1H'_2 \in ASA^{-1}$

2）单位元素：$E = AEA^{-1} \in ASA^{-1}$

3）逆元：$(H'_1)^{-1} = (AH_1A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}H_1^{-1}A^{-1} = AH_1^{-1}A^{-1}$

由于S 中必有 H_1^{-1}; $\therefore$ $AH_1^{-1}A^{-1} \in ASA^{-1}$

例：

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中，E，B构成子群 $S = \{E, B\}$，且：$AEA^{-1} = E$

$$ABA^{-1} = DA = C$$

$\therefore$ $\{E, C\} = ASA^{-1}$ 构成子群

定义：S是G的子群，$\boxed{\{ASA^{-1} = S, \forall A \in G\}}$则$S$ 称为G的不变子群或正规子群（ $ASA^{-1} = S \Rightarrow AS = SA$:左陪集合相应右陪集相等 ）。

例：

G	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$\{1,-1\}$ 是它的不变子群：

$$1 \cdot 1 \cdot (1)^{-1} = 1$$
$$-1 \cdot 1 \cdot (-1)^{-1} = 1$$
$$i \cdot 1 \cdot (i)^{-1} = 1$$
$$-i \cdot 1 \cdot (-i)^{-1} = 1$$

同理

$$1 \cdot (-1)(1)^{-1} \cdot = -1$$
$$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^{-1} = -1$$
$$i \cdot (-1)(i)^{-1} = -1$$
$$-i \cdot (-1)(-i)^{-1} = -1$$

例：

C_{3v}	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中，E，D，F 构成正规子群 $S=\{E,D,F\}$

$$\because AEA^{-1}=E\,;A\,DA^{-1}=BA^{-1}=F\,;A\,FA^{-1}=CA^{-1}=D$$
$$\therefore ASA^{-1}=S$$

正规子群的性质：

群G的正规子群由G的一个或几个完整的类构成，反之，
凡包含G中一个类或几个完整类的子群都是G的正规子群。

1）$S_m \in S$
$\forall x \in G, xS_m x^{-1} \in S$
$\therefore S_m$的整个类都在S里。
2）$S = C_1 + C_2 + \cdots$
$\forall x \in G, xSx^{-1} = xC_1x^{-1} + xC_2x^{-1} + \cdots$
$= C_1 + C_2 + \cdots = S$
$\therefore S$为正规子群

1.4.1 同构（isomorphism）和同态（homomorphism）

定义： 若群G'和G的所有元素间均按某种规律存在一一对应关系，它们的乘积也按同一规律一一对应，则称两群同构。

即：若$R, S\in G$; $R', S'\in G'$; $R'\leftrightarrow R$, $S'\leftrightarrow S$, 必有$R'S'\leftrightarrow RS$，则$G'\approx G$。

“$\leftrightarrow$” ——一一对应，“$\approx$” ——同构

对G的所有定理，对G'也成立，因此，在群论中，所有同构的群均被看作同一群。

例： 所有二阶群都同构于二阶反演群V_2

例： 正三角形对称群C_{3V}和S_3有相同乘法表，因此互相同构。

子群S和它的共轭子群ASA^{-1}是同构的

例：

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中，E，B构成子群 $S=\{E,B\}$，共轭子群ASA^{-1}为

$$\{E,C\}=ASA^{-1}$$

两者同构

定义：如果群G的任一个元素A都唯一地对应于群G'的一个元素A'，而群G'中的一个元素对应于群G的元素不只一个，并且如果对应于$AB=C$，就有$A'B'=C'$，则称G'同态于G，记为 $G' \sim G$。

即

$$
\begin{aligned}
G &= \{A_1, A_2, \cdots B_1, B_2, \cdots C_1, C_2, \cdots\} \\
G' &= \{A', \cdots B', \cdots C', \cdots\} \\
&A_1 \to A', B_1 \to B', \cdots \\
&A_2 \to A', B_2 \to B', \cdots
\end{aligned}
$$

且$A_i B_j = C_k$均对应于$A'B' = C'$

同态核定理：

若$G'\sim G$，分别与G'中单位元E'相对应的G中元素的集合 P 构成群G不变子群， P 称为同态对应的核。

证明：

（1）若 $A \to E', B \to E'$,则 $AB \to E'E' = E'$ ，即对 $\forall A, B \in P$, 有$AB \in P$, P具有封闭 性，因此是群G的子群。

（2）若 $A \in P, C \in G$, 而$C \to C' \in G'$ 则

$$CAC^{-1} \to C'E'C'^{-1} = E' \text{对一切C成立}$$

这就是说 $\mathrm{CPC^{-1} = P}$对一切$\mathrm{C \in G}$成立。

所以P是G的正规/不变子群。

例：

$$\begin{array}{ccc} & G' & \\ & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & i & -i \\ -1 & -1 & 1 & -i & i \\ i & i & -i & -1 & 1 \\ -i & -i & i & 1 & -1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} +i \rightarrow \\ -i \rightarrow \end{array}\right. -1$$

其中 $\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array}$ 称为同态对应的核core

$$\left.\begin{array}{l} +1 \rightarrow \\ -1 \rightarrow \end{array}\right. +1$$

G中与G'中单位元E'对应的那些元称为这一同态关系的同态核。

1.4.2 商群（quotient group）

定义： 将群$G\ (g)$按照正规子群$S(s)$ 进行分解（陪集），所得到的元素集合（即S 及其所有陪集）当作元素：

G按S 分解所得的商群。

$$\bar{G} = \frac{G}{S} = \{S, SA_2, \cdots, SA_i\}, \qquad i = \frac{g}{s}$$

“数学对象”：陪集

验证群：

$$(1)SA_mSA_n = SSA_mA_n = SA_mA_n$$
$$(2)(SA_mSA_n)SA_p = SA_mA_nA_p = SA_m\left(SA_nSA_p\right)$$

问商群的单位元、逆元？

$$(3)SSA_m = SA_m$$
$$(4)SA_m \rightarrow SA_m^{-1}$$

商群乘法表

	S	AS
S	S	AS
AS	AS	S

$$S = \{E, D, F\},$$
$$AS = \{A, B, C\}$$

例：

G

C_6	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
E	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
C_6^2	C_6^2	C_6^4	E	C_6^3	C_6^5	C_6
C_6^4	C_6^4	E	C_6^2	C_6^5	C_6	C_6^3
C_6	C_6	C_6^3	C_6^5	C_6^2	C_6^4	E
C_6^3	C_6^3	C_6^5	C_6	C_6^4	E	C_6^2
C_6^5	C_6^5	C_6	C_6^3	E	C_6^2	C_6^4

映射 $f \downarrow$

G'

C_2	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

绕6次轴：不转和转2π为E，转2π/6为C_6，转2π/3为$C_6{}^2$，转π为$C_6{}^3$，转4π/3为$C_6{}^4$，转5π/3为$C_6{}^5$。

C_6群同态于C_2，S为$\{E \quad C_6^2 \quad C_6^4\}$是同态的核，且可以证明：S是一个正规子群。如果以$S$来划分$G$，得两阶商群：

$$\bar{G} = \{(E, C_6^2, C_6^4), (C_6, C_6^3, C_6^5)\}$$

C_2

且 $\bar{G}$ $\boxed{\leftrightarrow}$ G' 同构。

§ 1.5 群的直（接乘）积

定义：设群 G_a（阶为g_a）和 群 G_b （阶为g_b）为群G的两个子群，它们之间元素之积可对易，即：$a_i \in G_a, b_j \in G_b$，有

$$a_i b_j = b_j a_i, (i = 1,2, \cdots g_a, j = 1,2, \cdots g_b)$$

那么按群G的乘法得到的 $g_a g_b$个元素$\{a_i b_j\}$也构成一个群，称为 G_a 和 G_b 的直积群，记为:$G_a \otimes G_b$ ， G_a和 G_b 称为直积因子。

直积封闭性要求

证：封闭性： $a_i b_j a_{i'} b_{j'} = a_i a_{i'} b_j b_{j'} = a_{i''} b_{j''}, \in G_a \otimes G_b$

逆元： $(a_i b_j)^{-1} = a_i^{-1} b_j^{-1} \in G_a \otimes G_b$

单位元： $E_a E_b = E \in G_a \otimes G_b$

显然： $G_a \otimes G_b = G_b \otimes G_a$， G_a 和 G_b 是G 的一个子群。

*直积群的不同直积因子（如a_i, b_j等）的元素是相互对易的，但同一个直积因子中的元素可不对易（如a_i, a_j等）。

*直积因子G_a和G_b都是直积群 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

$b_l \in G_b$ 取其共轭元

$$(a_i b_j) b_l (a_i b_j)^{-1} = a_i (b_j b_l b_j^{-1}) a_i^{-1} = a_i b_k a_i^{-1}$$

$$= a_i a_i^{-1} b_k = b_k$$

令 $a_i b_j = x$ 则$x G_b x^{-1} = E G_b$

$\therefore$ G_b 是 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

同理， G_a 也是 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

例：

G

C_6	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
E	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
C_6^2	C_6^2	C_6^4	E	C_6^3	C_6^5	C_6
C_6^4	C_6^4	E	C_6^2	C_6^5	C_6	C_6^3
C_6	C_6	C_6^3	C_6^5	C_6^2	C_6^4	E
C_6^3	C_6^3	C_6^5	C_6	C_6^4	E	C_6^2
C_6^5	C_6^5	C_6	C_6^3	E	C_6^2	C_6^4

绕6次轴：不转和转2π为E，转2π/6为C_6，转2π/3为$C_6{}^2$，转π为$C_6{}^3$，转4π/3为$C_6{}^4$，转5π/3为$C_6{}^5$。

$$S_1 = \{E, C_6^3\},$$
$$S_2 = \{E, C_6^2, C_6^4\}$$
$$G = S_1 \otimes S_2$$

群的直积是一个扩大群的方法

*直积群的类： $G = G_a \otimes G_b$

$$(a_{i'} b_{j'})(a_i b_j)(a_{i'} b_{j'})^{-1} = a_m b_n$$

$$左 = \left(a_{i'} a_i a_{i'}^{-1}\right)\left(b_{j'} b_j b_{j'}^{-1}\right)$$

$$\left(a_{i'} a_i a_{i'}^{-1}\right) = a_m \ ,$$

$$\left(b_{j'} b_j b_{j'}^{-1}\right) = b_n$$

直积群的类由群 G_a 的类与群 G_b 的类的乘积形成。

$N_G = N_a N_b$：类的个数关系

$h_G = h_a h_b$：每一类中的群元数关系