群表示的概念

定义： 若一组$m\times m$维的非奇异矩阵构成的群$D(G)$与已知群G同构或同态，则$D(G)$称为G的一个m维线性表示，简称“表示”。

* G中元素$R\in G$对应的矩阵$D(R)$称为R在表示$D(G)$中的表示矩阵。 $D(A)D(B)=D(AB)$ 对每一个群元A,B都成立。

* $D(R)$的迹 $\chi(R)=trD(R)$ —— R在$D(G)$中的特征标。

若同构，则$D(G)$ —— 忠实（ faithful ）表示

若同态，则$D(G)$ —— 非忠实（unfaithful）表示

- 例:

1) 对任何一个群G, 一阶单位矩阵都是它的一个表示, 称为一维恒等表示.

2) 任何一个矩阵群G本身是它自己的一个忠实表示.

3) 空间反演群{E,I} 在三维实坐标空间笛卡尔坐标系中的表示为

$$A(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A(I)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

- 等价表示: 设群G在线性空间V上的两个表示B和A通过一个相似变换相联系, 即对于任意$g_\alpha \in G$, 有$B(g_\alpha)=SA(g_\alpha)S^{-1}$, 其中S是V上的一个非奇异矩阵, 则称这两个表示为等价表示.

(1) 单位元素的矩阵表示必为单位矩阵

证：$\because$ $EA=AE=A$

$\therefore$ $D(E)D(A)=D(A)D(E)=D(A)$

$D(E)$必是单位矩阵

(2) $D(A^{-1}) = [D(A)]^{-1}$

$$\because D(A)D(A^{-1}) = D(AA^{-1}) = D(E) = I$$

$$D(A)[D(A)]^{-1} = I$$

$$\therefore D(A^{-1}) = [D(A)]^{-1}$$

例：G_6：$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

d_3 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

S_3：$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

C_{3v}: $E,\quad \sigma,\quad \sigma C_3^2,\quad \sigma C_3,\quad C_3^2,\quad C_3$

G_6	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

此四个群同构，二维表示：G_6

三维表示：d_3

例：求C_{3v}群三维表示d_3的等价表示

$$d_3 \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

设矩阵为：

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&0\end{pmatrix}$$

其逆矩阵为：

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{pmatrix}$$

可以得到等价表示：$\boxed{D'(A) = S^{-1}[D(A)]\, S}$

$$D'(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D'(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D'(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D'(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$D'(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D'(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

定义： 群G $\{E, A, B, \cdots\}$ 表示：$D(G)$ $\{D(E), D(A), D(B), \cdots\}$

则
$$trD(E) = \sum_{i=1}^{m} D(E)_{ii} \equiv \chi(E)$$
$$trD(A) = \sum_{i=1}^{m} D(A)_{ii} \equiv \chi(A)$$
$$trD(B) = \sum_{i=1}^{m} D(B)_{ii} \equiv \chi(B)$$
……

称$\chi(E), \chi(A), \chi(B), \ldots$分别为表示$D(E), D(A), D(B), \ldots$的特征标。

表示矩阵是可变的 ⟵ 相似变换

但表示的特征标是不变的。

证：
$$tr(xD(A)x^{-1}) = tr\left(x^{-1}xD(A)\right) = tr\left(D(A)\right)$$

可约表示，不可约表示 (reducible and irreducible)

设$G\{E, A, B, \ldots\}$有两组表示：$\{D^{(1)}(E), D^{(1)}(A), D^{(1)}(B), \ldots\}$

$\{D^{(2)}(E), D^{(2)}(A), D^{(2)}(B), \ldots\}$

则超矩阵（块状对角矩阵）

$$\left\{\begin{pmatrix} D^{(1)}(E) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(E) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D^{(1)}(A) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(A) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D^{(1)}(B) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(B) \end{pmatrix}\right\}$$

也是G的表示（反之亦真）。

证明：

$$D(A)D(B)=\begin{bmatrix} D^{(1)}(A)D^{(1)}(B) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(A)D^{(2)}(B) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} D^{(1)}(AB) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(AB) \end{bmatrix}=D(AB)$$

对于有S组表示时，超矩阵

$$\left\{ D(A)=\begin{pmatrix} D^{(1)}(A) & & & 0 \\ & D^{(2)}(A) & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & D^{(s)}(A) \end{pmatrix} (\forall A\in G) \right\}$$

也是G的表示。

定义：以上$D(A)$称为 $D^{(1)}(A), D^{(2)}(A), \cdots D^{(S)}(A)$的直和（direct sum）

记作：
$$D(A) = D^{(1)}(A) \oplus D^{(2)}(A) \oplus \cdots \oplus D^{(S)}(A) = \sum_i \oplus\, a_i D^{(i)}(A)$$

其中a_i代表相同的$D^i(A)$的个数。

上面是将S套表示化为一套，若把一套通过相似变换分解为许多套表示，称为约化。

定义：可约化的表示称为可约表示，

不可约化的表示称为不可约表示。

两种表示

设 $G\{E, A, B, \cdots\}$ 有表示 $D(G)\{D(E), D(A), D(B), \cdots\}$,

若有 $\tilde{D}^{-1}(G)\{\tilde{D}^{-1}(E), \tilde{D}^{-1}(A), \tilde{D}^{-1}(B)\cdots\}$, 则 $\tilde{D}^{-1}(G)$ 是G的表示。

证明：

$$[\tilde{D}(AB)]^{-1} = [\widetilde{D(A)D(B)}]^{-1} = [\tilde{D}(B)\tilde{D}(A)]^{-1} = \tilde{D}^{-1}(A)\tilde{D}^{-1}(B)$$

所以， $\tilde{D}^{-1}(G)$ 为表示。

同理$D^*(G)\{D^*(E), D^*(A), D^*(B), \cdots\}$

也是G 的一个表示，称为复共轭表示。

问： $D^{-1}(G)$ 是不是群 G 的表示？