II. 有限群表示的基本定理

幺正化定理

定义： 若一个群G的表示矩阵都是幺正矩阵，则这个表示称为G的幺正表示。

定理1： **有限**群的任何非奇异的矩阵表示，都可以通过相似变换变成幺正的矩阵表示。

证：对于给定的表示$D(G)$，要找出相似变换x，使得：

$$\overline{D}(R) = x^{-1}D(R)x \qquad \text{——①} \quad （假定D非幺正）$$

和

$$\bar{D}(R)^{\dagger} \cdot \bar{D}(R) = 1 \qquad \text{——②}$$

经过相似变换后，$\overline{D}(G)$ 仍为G的表示称等价表示。

思路：按要求反推 ⟹ 将①式代入②式得：R，$S \in G$

$$\{x^{-1}D(R)x\}^\dagger\{x^{-1}D(R)x\} = 1$$

$(x^\dagger)^{-1}$ $(\ )$ x^{-1}

即 $$\boxed{x^\dagger D(R)^\dagger (x^{-1})^\dagger \cdot x^{-1} D(R) x = 1}$$

即 $D(R)^\dagger (xx^\dagger)^{-1} D(R) = (xx^\dagger)^{-1}$ ——（*）

据群的性质（和群表示的性质）

$$D(R)^\dagger \sum_{S\in G}\left[D(S)^\dagger D(S)\right] D(R)$$

$$= \sum_{S\in G} D(SR)^\dagger D(SR) = \sum_{S\in G} D(S)^\dagger D(S)$$ （重排定理）

∴若能找到x，使 $(xx^\dagger)^{-1} = \sum_{S\in G} D(S)^\dagger D(S) = H$（厄米矩阵）

（*）式便成立了，也就证明了定理1。

H 作为厄米矩阵，总可通过幺正的相似变换 U 使其对角化：

思路：利用对角阵和幺正阵U 来寻找厄米矩阵H

$$\Gamma = U^{-1}HU;\ \Gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\sigma_\mu > 0$$

若令；
$$\boxed{x = U\Gamma' U^{-1}}$$
$$\Gamma'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}\left(\Gamma_{\mu\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(xx^\dagger\right)^{-1} = \left[U\Gamma' U^{-1}U^{-1\dagger}\Gamma'^\dagger U^\dagger\right]^{-1} = \left[U\Gamma' U^\dagger U\Gamma'^\dagger U^\dagger\right]^{-1}$$
$$= \left[U\Gamma'\Gamma'^\dagger U^\dagger\right]^{-1} = U\Gamma'^{\dagger-1}\Gamma'^{-1}U^{-1}$$
$$= U\left(\Gamma'\Gamma'^\dagger\right)^{-1}U^{-1} = U\Gamma U^{-1}$$

$$\boxed{\text{幺正矩阵}\ \ \hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1},}$$

代入$(xx^\dagger)^{-1}$，而 $H = U\Gamma U^{-1}$ $\therefore \left(xx^\dagger\right)^{-1} = H$，定理得证。

$\therefore$ 以后的所有表示均看成幺正表示。

定理2：若群$G\{A_1, A_2, \ldots A_k, \ldots A_h\}$有两组等价的幺正表示：

$$D^{(1)}(A_1), D^{(1)}(A_2), \ldots D^{(1)}(A_k), \ldots D^{(1)}(A_h)$$

$$D^{(2)}(A_1), D^{(2)}(A_2), \ldots D^{(2)}(A_k), \ldots D^{(2)}(A_h)$$

则$D^{(1)}(G)$和$D^{(2)}(G)$的相似变换可以借助于一个幺正矩阵来实现:

$$UD^{(1)}(A_k)U^{-1} = D^{(2)}(A_k)(\forall A_k \in G)$$

正交定理

Schur引理1： 与群的某一不可约表示的所有矩阵可对易的矩阵（M）必为常数矩阵。（此引理对所有群均成立）

证：I：若两个表示矩阵对易 $D(A)D(B)=D(B)D(A)$，则经过相似变换后仍可对易，所以若表示矩阵不是幺正，可用一相似变换使它幺正，而对易性不变。

$$\overline{D}(R)=x^{-1}D(R)x$$

$$\overline{D}(A)\overline{D}(B)=x^{-1}D(A)xx^{-1}D(B)x=x^{-1}D(A)D(B)x$$

$$=x^{-1}D(B)D(A)x=x^{-1}D(B)xx^{-1}D(A)x=\overline{D}(B)\overline{D}(A)$$

所以下面就认为$D(R)$为幺正矩阵。

II：若对M加上厄米条件，也不影响结论：

设群G，表示 $D(G)\{D(R)\forall R \in G\}$

若 $D(R)M = MD(R)$ ， 对此式两边取转置共轭：

$M^{\dagger}D(R)^{\dagger} = D(R)^{\dagger}M^{\dagger}$ 两边乘 $D(R)(\ \ )D(R)$

即： $D(R)M^{\dagger}\boxed{D(R)^{\dagger}D(R)} = \boxed{D(R)D(R)^{\dagger}}M^{\dagger}D(R)$

$\because D(R)$ 幺正，故上式即为： $D(R)M^{\dagger} = M^{\dagger}D(R)$

即：只要M和$D(R)$对易，有$M^{\dagger}$和$D(R)$对易，

则 $D(R)$与$H_1 \equiv M + M^{\dagger}$和$H_2 \equiv i(M - M^{\dagger})$ 都可对易。

$$H_1{}^{\dagger} = (M + M^{\dagger})^{\dagger} = M^{\dagger} + M = H_1;$$
$$H_2{}^{\dagger} = -i(M - M^{\dagger})^{\dagger} = -iM^{\dagger} + iM = H_2$$

H_1 和 H_2 均为厄米，因此，只要证明$D(R)$和厄米矩阵H_1, H_2可对易，则$D(R)$必和M对易。所以下面就认为 M 为厄米矩阵。

$V^{-1}(\ )V$

III: 对厄米矩阵M，总有幺正矩阵V，使

$$V^{-1}MV = d \qquad d\text{为对角矩阵}$$

$$D(R)M = MD(R)$$

$$\therefore \boxed{V^{-1}D(R)V}\boxed{V^{-1}MV} = V^{-1}MVV^{-1}D(R)V$$

$\because$ 幺正矩阵之积仍为幺正矩阵，故

$$V^{-1}D(R)V = D'(R) \quad \text{仍为幺正矩阵}$$

证明：

$$D'(R)^{\dagger} = (V^{-1}D(R)V)^{\dagger} = V^{\dagger}D^{\dagger}(R)(V^{-1})^{\dagger} = V^{\dagger}D^{-1}(R)V$$

$$D'(R)^{-1} = (V^{-1}D(R)V)^{-1} = V^{-1}D^{-1}(R)(V^{-1})^{-1} = V^{\dagger}D^{-1}(R)V$$

$\therefore$ 得：

$$\boxed{D'(R)}\boxed{d} = dD'(R)$$

设对角矩阵d有p个对角矩阵元相等，其他n-p个对角元互不相等，作

$$d' = xdx^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & & & & & & \\ & d_{22} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_{pp} & & & \\ & & & & d_{p+1,\ p+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_{nn} \end{pmatrix}$$

相等

这样的x一定存在

$x(\ )x^{-1}$

这时，上式变为：$\quad x\boxed{D'(R)x^{-1}xd}x^{-1} = x\boxed{dx^{-1}xD'(R)}x^{-1}$

即 $D''(R)d' = d'D''(R)$，其中 $\quad D''(R) = xD'(R)x^{-1}$

$$[D''(R)d']_{ij} = \sum_{j'} D''(R)_{ij'} d'_{j'j} = D''(R)_{ij} d'_{jj} \quad (\because 当\ j' \neq j 时 d_{j'j} = 0\ )$$

$$[d'D''(R)]_{ij} = \sum_{i'} d'_{ii'} D''(R)_{i'j} = d'_{ii} D''(R)_{ij}$$

$\therefore \quad D''(R)_{ij} d'_{jj} = d'_{ii} D''(R)_{ij} \qquad$ 即：$D''(R)_{ij}\left[d'_{ii} - d'_{jj}\right] = 0$

$$D''(R)_{ij}\left[d'_{ii}-d'_{jj}\right]=0$$

若对角矩阵元在 i，$j>p$ 时，且i和j不相等，则 $D''(R)_{ij}=0$

或当i和j一个大于p，一个小于p时，$D''(R)_{ij}=0$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1,2\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ p, & p+1,\ \ldots\ \ldots\ n \end{array} \\ \therefore D''(R)= & \left(\begin{array}{c:c} \text{可能不为零} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} & 0 \\ 0 & \text{不为零} \end{matrix} \end{array}\right) \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ p \\ p+1 \\ \cdots \\ \cdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

而这个矩阵是可约的，同我们假设它不可约矛盾，要使此矩阵不可约，则必有 $p\equiv n$，即d为常数矩阵。又由于 $d=x^{-1}d'x$ 。

$\therefore d$也为常数矩阵，$M=vdv^{-1}$ 也为常数矩阵。

Schur引理1： 与群的某一不可约表示的所有矩阵可对易的矩阵（M）必为常数矩阵。（此引理对所有群均成立）

Schur引理1直接应用**：**

① Abel群的表示矩阵一定是一维的（即常数矩阵），因为它的任何一个元素的表示矩阵必与其它所有元素的表示矩阵对易。

② 如某个不是比例于单位矩阵的矩阵(常矩阵），与表示的所有矩阵对易，则此表示是可约的。

Schur引理2： 设$D^{(1)}(G)$和$D^{(2)}(G)$是群G的两个不等价不可约表示，维数分别为m_1和m_2，x是一个$m_1 \times m_2$矩阵，如果对所有元素$R \in G$有：$D^{(1)}(R)x = xD^{(2)}(R)$ —— （*） 则必有$x = 0$。

证明：

$m_1 \times m_1$

$m_1 \times m_2$

$m_2 \times m_2$

$$D^{(1)}(R)x = xD^{(2)}(R)$$

不妨假设$D^{(1)}$ 和$D^{(2)}$均为幺正矩阵，它们不可再约化

对（*）两边取厄米共轭： $x^{\dagger} D^{(1)\dagger}(R) = D^{(2)\dagger}(R) \cdot x^{\dagger}$

$\because$ $D^{(1)}$ 和$D^{(2)}$幺正，故有 $x^{\dagger} D^{(1)-1}(R) = D^{(2)-1}(R) x^{\dagger}$

即 $x^{\dagger} D^{(1)}(R^{-1}) = D^{2}(R^{-1}) x^{\dagger}$

$\because R$是取遍整个群G，故上式可写成：$x^{\dagger} D^{(1)}(R) = D^{(2)}(R) x^{\dagger}$

$$x^\dagger D^{(1)}(R)=D^{(2)}(R)x^\dagger$$

左乘x得： $$xx^\dagger D^{(1)}(R)=\boxed{xD^{(2)}(R)}x^\dagger$$

$\because$ $D^{(1)}(R)x=xD^{(2)}(R)$，上式为： $xx^\dagger D^{(1)}(R)=\boxed{D^{(1)}(R)x}x^\dagger$ $(\forall R\in G)$

据Schur引理1，$xx^\dagger$必为常数矩阵：

$$xx^\dagger=\lambda I_{m_1} \qquad \text{——（**）}$$

（i）当m_1=m_2时，此时x必为奇异的，即$\det x=0$，否则据（*）有

$$D^{(1)}(R)x=xD^{(2)}(R) \longrightarrow D^{(1)}(R)=xD^{(2)}(R)x^{-1}$$

即$D^{(1)}(R)$和$D^{(2)}(R)$ 等价，与假设矛盾，故x是奇异的

$\therefore$对（**）两端求行列式：$\det(xx^\dagger)=\det(x)\det(x^\dagger)=\lambda^{m_1}=0$

$\therefore$ $\lambda=0$ 又 $$\lambda=\sum_j x_{ij}x_{ji}^\dagger=\sum_j\left|x_{ij}\right|^2=0$$

相当于λ_{ii}

$\therefore$ x的所有矩阵元均为零（$\because i,j$均可变）

（ii）当$m_1 \neq m_2$时，设$m_1 > m_2$

可对矩阵x添上m_1-m_2列零使得x变为x'：

$$x' = \left.\left(\underbrace{x}_{m_2} \;\vdots\; \underbrace{0}_{m_1 - m_2} \right)\right\} m_1 \quad 且： \quad x'^{\dagger} = \underbrace{\begin{pmatrix} x^{\dagger} \\ 0 \end{pmatrix}}_{m_1} \begin{array}{l} \}m_2 \\ \}m_1 - m_2 \end{array}$$

显然：$x' \cdot x'^{\dagger} = x \cdot x^{\dagger}$ $\quad\therefore\quad$ $x' \cdot x'^{\dagger} = \lambda I_{m_1}$

但 $\quad \det x' = \det x'^{\dagger} = 0$

重复(i)的证明可得x=0，（$\therefore$ x'=0）

结论：不同的不可约表示不可能彼此有联系（除非用零矩阵）

定义： 群G的m维线性表示可以看成G的一个矩阵函数，它的每一个矩阵元都是G的一个函数，称为群函数，共有m^2个群函数。

正交定理：（the Great orthogonality theorem）

有限群G的不等价不可约幺正表示的矩阵元素，作为群函数，满足正交关系：

$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D_{\mu\rho}^{(i)}(R)^* D_{\nu\lambda}^{(j)}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda} \qquad \text{——（}\Delta\text{）}$$

其中g是群G的阶，m_j是表示$D^{(j)}(G)$的维数。

证明：设有一$m_i \times m_j$矩阵Y，它只有第μ行第ν列元素不为零

即： $(Y)_{\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}$

定义$m_i \times m_j$矩阵X： $X = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}(R^{-1})YD^{(j)}(R)$

则： $$\boxed{X_{\rho\lambda}} = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\rho'\lambda'} D^{(i)}_{\rho\rho'}(R^{-1})Y_{\rho'\lambda'}D^{(j)}_{\lambda'\lambda}(R)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\rho'\lambda'} D^{(i)}_{\rho\rho'}(R^{-1})\delta_{\mu\rho'}\delta_{\nu\lambda'}D^{(j)}_{\lambda'\lambda}(R)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\rho\mu}(R^{-1})D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) \qquad \text{——（}\Delta\Delta1\text{）}$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\rho\mu}(R)^{-1}D^{(j)}_{\nu\lambda}(R)$$

幺正

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\rho\mu}(R)^{+}D^{(j)}_{\nu\lambda}(R)$$

这就是Δ式（正交定理）左边

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\mu\rho}(R)^{*}D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) \qquad \text{——（}\Delta\Delta2\text{）}$$

另一方面

$$D^{(i)}(S)X=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}D^{(i)}(S)\cdot D^{(i)}(R^{-1})YD^{(j)}(R)$$

$$=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}D^{(i)}(SR^{-1})YD^{(j)}(R)\boxed{\cdot D^{(j)}(S^{-1})\cdot D^{(j)}(S)}$$

单位元

$$=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}D^{(i)}(SR^{-1})YD^{(j)}(RS^{-1})D^{(j)}(S)$$

$$=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}D^{(i)}((RS^{-1})^{-1})YD^{(j)}(RS^{-1})D^{(j)}(S)$$

重排定理

$$=\frac{1}{g}\sum_{R\in G}D^{(i)}(R^{-1})YD^{(j)}(R)D^{(j)}(S)$$

$$\equiv XD^{(j)}(S)$$

$$\boxed{D^{(i)}(S)X=XD^{(j)}(S)}$$

$$D^{(i)}(S)X = XD^{(j)}(S)$$

当$i\neq j$时，据schur引理2， $X \equiv 0$ （∵S是任取的）

当$i=j$时，据schur引理1， $X = C_{\mu\nu}\boxed{I} = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(j)}\left(R^{-1}\right) Y D^{(j)}(R)$

（∵C常数同Y有关，故同$\mu\nu$有关） $\boxed{\delta_{\rho\lambda}}$

$E=I$ (单位矩阵)

对（ΔΔ2）两边取$i=j$，$\rho=\lambda$并对λ求和：

$$\sum_{\lambda} X_{\lambda\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{m_j} C_{\mu\nu} = m_j C_{\mu\nu} = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\lambda} D^{(j)}_{\mu\lambda}(R)^{*} D^{(j)}_{\nu\lambda}(R)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\lambda} D^{(j)}_{\lambda\mu}(R)^{+} D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\lambda} D^{(j)}_{\lambda\mu}(R)^{-1} D^{(j)}_{\nu\lambda}(R)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{R\in G}\sum_{\lambda} D^{(j)}_{\lambda\mu}(R^{-1}) D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(j)}_{\nu\mu}\left(RR^{-1}\right) = \delta_{\mu\nu}$$

$$\therefore \quad C_{\mu\nu} = \frac{1}{m_j}\delta_{\mu\nu} \qquad \frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\mu\rho}(R)^{*} D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{p\lambda}$$

表示矩阵元的正交性定理

有限群G的不等价不可约幺正表示的矩阵元素，作为群函数，满足正交关系：

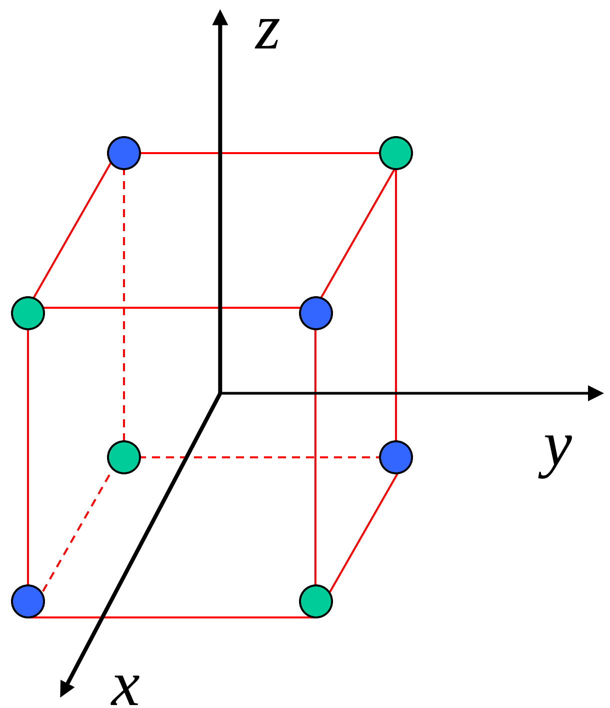
$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{(i)}_{\mu\rho}(R)^* D^{(j)}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda} \qquad \text{——（Δ）}$$

其中g是群G的阶，m_j是表示$D^{(j)}(G)$的维数。

正交定理指出：作为群函数，群G的不等价不可约表示的矩阵元互相正交，同一不可约幺正表示的m_j^2个矩阵元也互相正交，这些群函数模的平方等于g/m_j。

例：两种原子组成的四方晶体的对称操作所组成的群的表示

$$a = b \neq c$$



共有八个对称操作使晶格保持不变：

E：不动，

$C_2(z)$：绕z轴的2-度转动，

$C_2(x)$和$C_2(y)$：绕x轴和y轴的2-度转动，

σ_1和σ_2：关于对角平面反射

iC_4和iC_4^{-1}：关于z轴4-度转动接着中心反演

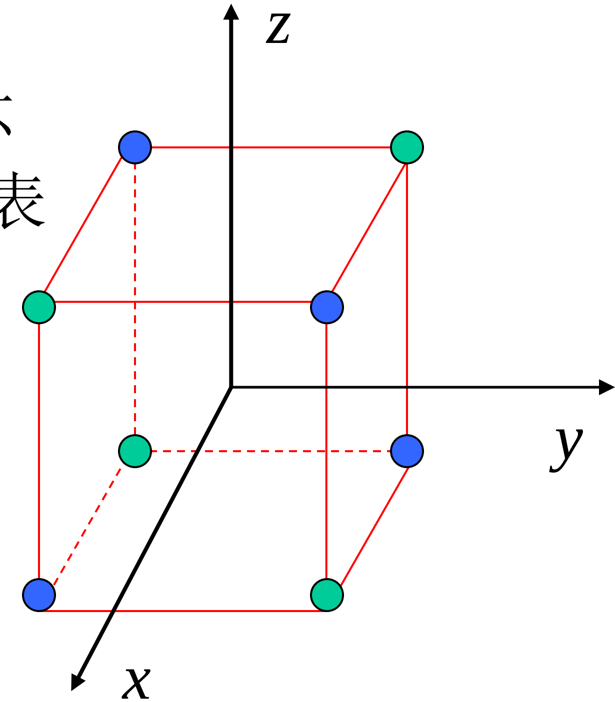
八个对称操作所对应的变换矩阵

$$D(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(C_2(z))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(C_2(x))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(C_2(y))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};$$

$$D(\sigma_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(\sigma_2)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(iC_4)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(iC_4^{-1})=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

蓝色 对角线 （下底面） 绿色 对角线 绕z轴逆时针

为方块对角矩阵，为右下角元素组成的1-维不可约表示$D^{(1)}$及左上角元素组成的2-维不可约表示$D^{(2)}$，则3-维可约表示可写成直和的形式：



$$D(a)=D^{(1)}(a)\oplus D^{(2)}(a)$$

所以用(x, y, z)为基矢求得的表示是可约化的。

$$D(E)=\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right);D(C_2(z))=\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&0\\0&-1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right);D(C_2(x))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(C_2(y))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};$$

$$D(\sigma_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(\sigma_2)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(iC_4)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(iC_4^{-1})=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&0\\\hline 0&0&-1\end{array}\right)$$

一维显然表示

	E	$C_2(z)$	$C_2(x)$	$C_2(y)$	σ_1	σ_2	iC_4	iC_4^{-1}
$D^{(1)}$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D^{(2)}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
$\bar{D}$	1	1	1	1	1	1	1	1

	E	$C_2(z)$	$C_2(x)$	$C_2(y)$	σ_1	σ_2	iC_4	iC_4^{-1}
$D^{(1)}$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D^{(2)}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$
$\bar{D}$	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D_{\mu\rho}^{(i)}(R)^{*} D_{\nu\lambda}^{(j)}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

$$\sum_{R\in G} D^{(1)}(R)^{*}\,\overline{D}(R) = 1\times1+1\times1+(-1)\times1+(-1)\times1+1\times1+1\times1+(-1)\times1+(-1)\times1=0$$

$$\sum_{R\in G} D_{11}^{(2)}(R)^{*} D_{11}^{(2)}(R) = 1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1+(-1)\times(-1)+0+0+0+0=4=8/2$$

$$\sum_{R\in G} D_{11}^{(2)}(R)^{*} D_{22}^{(2)}(R) = 1\times1+(-1)\times(-1)+1\times(-1)+(-1)\times1+0+0+0+0=0$$

正三角形C_{3v}的不可约表示：

$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D_{\mu\rho}^{(i)}(R)^* D_{\nu\lambda}^{(j)}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

	E	A	B	C	D	F
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$;

$$\sum_{R\in G} D_{11}^{(1)}(R)^* D_{11}^{(2)}(R) = 1\times 1 + (-1)\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 1 + (-\frac{1}{2})\times 1 + (-\frac{1}{2})\times 1 = 0$$

$$\sum_{R\in G} D_{12}^{(2)}(R)^* D_{12}^{(2)}(R) = 0 + 0 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 = \frac{6}{2}$$

$$\sum_{R\in G} D_{11}^{(2)}(R)^* D_{12}^{(2)}(R) = 0 + 0 + \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$$