IV. 正规(regular)表示

矢量空间的矢量可以是各种各样的数学对象，现在用一个群$G=\{E,A,B,..,R,S,...\}$中的各个**群元作为基矢**，定义加法、数乘和内积， 建立一个矢量空间，称为群元空间

群元空间的维度是？ g

$\vec{R}$与$\vec{S}$之和记为$\vec{R}+\vec{S}$

不能进一步进行化简，如同三维空间的基矢 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

群元空间中任一矢量

$$\vec{V}=\sum_{R}\vec{R}V_{R},$$

V_R是矢量$\vec{V}$在基矢$\vec{R}$上的分量。

群元空间中的算符

把群元本身当成算符，算符对群元空间中的每个基矢（也是群元）的作用就是群乘得到另一个基矢

$$\overset{\frown}{R}\vec{S} = \vec{T},(T = RS)$$

正规（正则）表示

表示空间为群元空间，群元本身作为此空间的变换算符

$$P_R\varphi_\alpha(r) = \sum_\beta \varphi_\beta(r)D(R)_{\beta\alpha}$$

$$\overset{\frown}{R} \qquad \vec{S}$$

正规表示和特征标表

正规表示

C_{3v}	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

$$E\begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A \\ E \\ D \\ F \\ B \\ C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

称为A的正规表示
（regular representation）

$$B\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}B\\F\\E\\D\\C\\A\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$C\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}C\\D\\F\\E\\A\\B\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}D\\C\\A\\B\\F\\E\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

表示矩阵

$$F\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}F\\B\\C\\A\\E\\D\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}E\\A\\B\\C\\D\\F\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A_\alpha\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_\beta\\\vdots\\A_g\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A_\alpha A_1\\A_\alpha A_2\\\vdots\\A_\alpha A_\beta\\\vdots\\A_\alpha A_g\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_\beta\\\vdots\\A_g\end{pmatrix}^T D(A_\alpha)=\begin{pmatrix}\sum_r A_r D(A_\alpha)_{r1}\\\sum_r A_r D(A_\alpha)_{r2}\\\vdots\\\sum_r A_r D(A_\alpha)_{r\beta}\\\vdots\\\sum_r A_r D(A_\alpha)_{rg}\end{pmatrix}^T$$

此类表示称为（左）正规表示。

$$P_R\varphi_\alpha(r)=\sum_\beta\varphi_\beta(r)D(R)_{\beta\alpha}$$

正规表示有如下性质：

1）正规表示一般是可约的：

2）$\chi(A_\alpha) = \begin{cases} \sum_r 1 = g & (A_\alpha = E) \\ 0 & (A_\alpha \neq E) \end{cases}$

3）$D = \sum_j \bigoplus a_j D^j$ ，而$a_j = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} \chi(R)\chi^j(R)^*$

对正规表示

$$a_j = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} \chi(R)\chi^j(R)^* = \frac{1}{g}\chi(E)\chi^j(E)^* = \frac{1}{g} g\chi^j(E) = m_j$$

即D中有m_j个相同的表示矩阵D^j （不可约）

$$a_j = m_j \neq 0$$

每个不可约表示都出现

不可约表示的维数定理：

1，在正规表示中，群*G*的每一个不可约表示都出现，而且每个不可约表示的出现次数等于这个表示的维数。

2，Burnside定理: 一个群全部不可约表示的维数的平方和，等于群*G*的阶。

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_c^2 = g$$

证明：

$$\underbrace{g}_{\text{正规表示的维数}} = \chi(E) = \sum_j a_j \chi^j(E) = \sum_j m_j m_j = \sum_j m_j^2$$

正交性关系

不可约表示矩阵元

$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^{i}_{\mu\rho}(R)^{*} D^{j}_{\nu\lambda}(R) = \frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$$

特征标

$$\sum_{R\in G} \chi^{i}(R)^{*}\chi^{j}(R) = g\delta_{ij}$$

对矢量空间的理解

$$\vec{V}^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R}\, V^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D^i_{\alpha\gamma}(R)$$

$g = \sum_i l_i^2$ 个矢量

$\vec{V}^{111}$, $\vec{V}^{211}$, $\vec{V}^{311}$, $\vec{V}^{312}$, $\vec{V}^{321}$, $\vec{V}^{322}$

$$\begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} \quad \sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

D_3 群有三组不可约表示：

$\{1, -1, -1, -1, 1, 1\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

完备性关系
(第二正交性关系)

$$\vec{V}^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D^i_{\alpha\gamma}(R)$$

$g = \sum_i l_i^2$ 个矢量

一组表示矢量构成群元空间的一组基矢，群元空间中的一切矢量可以用这组基矢的叠加展开，这就是表示矢量的完备性。

不可约表示矩阵元

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{\mu=1}^{l_i} \sum_{\rho=1}^{l_i} l_i \, D^i_{\mu\rho}(R)^* D^i_{\mu\rho}(S) = g\delta_{RS}$$

对不可约表示求和

Page: 93-95

特征标

$$h_l \sum_{i=1}^{r} \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g\delta_{lm}$$

第l类的群元个数

一个有限群的不等价不可约表示的总数r 与群中类的数目c 相等

$$\boxed{r = c}$$

正交性: $$\sum_{C=1}^{c} h_C \chi_C^{i*} \chi_C^{j} = g\delta_{ij} \quad (1)$$

取(1)式中 $i = j$ $$\sum_{C=1}^{c} h_C \chi_C^{i*} \chi_C^{i} = g$$

对表示求和

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{C=1}^{c} h_C \chi_C^{i*} \chi_C^{i} = \sum_{i=1}^{r} g = rg \qquad (1')$$

对类求和

完备性: $h_l \sum_{i=1}^{r} \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g\delta_{lm}$ （2）

第l类的群元个数

取 $C_l = C_m = C \rightarrow h_C \sum_{i=1}^{r} \chi_C^{i*} \chi_C^{\mathrm{i}} = g$

对类求和

$$\sum_{C=1}^{c} h_C \sum_{i=1}^{r} \chi_C^{i*} \chi_C^{\mathrm{i}} = \sum_{C=1}^{c} g = cg \qquad (2')$$

比较$(1')$ $(2')$

$$\boxed{r = c}$$

正交完全关系和特征标表

特征标表：

$$\begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & \cdots & C_i & \cdots & C_c \\ \hline D^1 & \chi_1^1 & \chi_2^1 & \cdots & \chi_i^1 & \cdots & \chi_c^1 \\ D^2 & \chi_1^2 & \chi_2^2 & \cdots & \chi_i^2 & \cdots & \chi_c^2 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^j & \chi_1^j & \chi_2^j & \cdots & \chi_i^j & \cdots & \chi_c^j \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D^r & \chi_1^r & \chi_2^r & \cdots & \chi_i^r & \cdots & \chi_c^r \end{array}$$

$r = c$

r 个表示，
c 个类

$r = c$

特征标表中$r = c$：类的数目等于不等价不可约表示的数目。

不等价不可约表示个数

类数

定理：若以某一共轭元素类在各个不可约表示的特征标为分量构成矢量，则各个类所代表的矢量正交：

$$h_l \sum_{i=1}^{r} \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g\delta_{lm}$$

—— 完备性

第l类的群元个数

例： $D_3: \{E\}, \{A, B, C\}, \{D, F\}$ 三个类，特征标为

C_1 C_2 C_3

设特征标为：

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	a	b
二维	D^3	2	c	d

利用三个正交关系方可求得a, b, c, d（取实数）

解法1：利用完备性

$$h_l\sum_{i=1}^{r}\chi^i(C_l)^*\chi^i(C_m)=g\delta_{lm}$$

当 $l=m=2$ 时，得 $3(1+|a|^2+|c|^2)=6\Rightarrow|a|^2+|c|^2=1$ —— （1）

$l=1,m=2$ 时，得 $1+a+2c=0$ —— （2）

$l=1,m=3$ 时，得 $1+b+2d=0$ —— （3）

$l=m=3$ 时，得 $2(1+|b|^2+|d|^2)=6$ —— （4）

$l=2,m=3$ 时，得 $1+a^*b+c^*d=0$ —— （5）

解得 $a=-1,b=1,c=0,d=-1,$

$C_1,\ C_2,\ C_3$

$D_3:\{E\},\{A,B,C\},\{D,F\}$

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	a	b
二维	D^3	2	c	d

列正交性

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	-1	1
二维	D^3	2	0	-1

$$\sum_{l=1}^{c} h_l \chi^i(C_l)^* \chi^j(C_l) = g\delta_{ij}$$

解法2：用正交性

当 $i=1, j=2$ ，得 $1\times 1+3a+2b=0$

$i=1, j=3$ ，得 $1\times 2+3c+2d=0$

$i=2, j=2$ ，得 $1\times 1+3|a|^2+2|b|^2=6$

$i=2, j=3$ ，得 $1\times 2+3a^*c+2b^*d=0$

$i=3, j=3$ ，得 $4+3|c|^2+2|d|^2=6$

还有另外一组解吗？

解之得 $a=-1, b=1$， $c=0, d=-1,$

特征标表

$D_3, \{E\}, \{A,B,C\}, \{D,F\}$

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	a	b
二维	D^3	2	c	d

行正交性 $\longrightarrow$

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	-1	1
二维	D^3	2	0	-1

解法2：用正交性

$$\sum_{l=1}^{c} h_l \chi^i(C_l)^* \chi^j(C_l) = g\delta_{ij}$$

当 $i=1, j=2,$ 得 $1\times 1+3a+2b=0$

$i=1, j=3,$ 得 $1\times 2+3c+2d=0$

$i=2, j=2,$ 得 $1\times 1+3|a|^2+2|b|^2=6$

$i=2, j=3,$ 得 $1\times 2+3a^*c+2b^*d=0$

$i=3, j=3,$ 得 $4+3|c|^2+2|d|^2=6$

可以是这一组解吗？

No -------

D^2表示不可被幺正化！

解之得 $a=-1, b=1$， $c=0, d=-1,$

$D_3, \{E\}, \{A, B, C\}\{D, F\}$

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	a	b
二维	D^3	2	c	d

行正交性

特征标表

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	$3/5$	$-7/5$
二维	D^3	2	$-4/5$	$1/5$

例如： D_3群有三组表示，它也只有三个类。

D_3 群有三组不可约表示：

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

{1, 1, 1, 1, 1, 1}

{1, -1, -1, -1, 1, 1}

D_3 群的三个类：

E 自成一类

A，B，C组成一类

D、F组成一类

有限群的群元为g个取值，群元空间为g 维，所以只有g个线性无关的群函数，矢量空间中线性无关的矢量(由群函数构建，参见P91)数目不能大于空间的维数 。 群表示矩阵元是群函数。

Burnside定理：有限群所有不等价不可约表示维数平方和等于群的阶数：

$$\sum_j m_j^2 = g$$

群G共有C（与群的类的个数相等）套不等价不可约幺正表示： $D^1, D^2, \cdots D^j, \cdots D^c$

维数： $m_1, m_2, \ldots m_j, \ldots m_c$

则

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_j^2 + \cdots + m_c^2 = g$$

（G的阶）

四阶群： $G = \{E, A, B, C\}$ 两种可能的群表

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

循环群：

B=A^2,

C=$BA = A^3$,

G={E, A, A^2, A^3}

问：此群有几个不等价不可约表示？

	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

非循环群：

$A^2 = B^2 = C^2 = E$

$$D(E)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(C_2(z))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(C_2(x))=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(C_2(y))=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};$$

$$D(\sigma_1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(\sigma_2)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix};D(iC_4)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix};D(iC_4^{-1})=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

一维显然表示

下面三个表示是否是此群全部的不可约表示？

	E	$C_2(z)$	$C_2(x)$	$C_2(y)$	σ_1	σ_2	iC_4	iC_4^{-1}
D^1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
D^2	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
D^3	1	1	1	1	1	1	1	1

$1^2+2^2+1^2=6$

特征标给出的信息：

特征标是类的函数，

表示 D^2 ： 元素1,2自成一类，3,4,5,6,7,8

特征标相同（为0）

进入下一轮筛选

表示 D^1 ： 元素5,6表示矩阵与3,4,7,8的不一样

直接从计算的角度：（5,6）；（3,4）；（7,8）

三个类里每个类中的两个元素表示矩阵差一个符号

D^2 表示矩阵依次为： $I, -I, \sigma_z, -\sigma_z, \sigma_x, -\sigma_x, -i\sigma_y, i\sigma_y$

Pauli矩阵性质： $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \qquad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

特征标表的另一种求法 ----- 类和法

1.定义

(a) 矢量的群乘： 群元空间中按照群的运算得出的第三个矢量。如在 D_3 群中，

$$(\vec{A}+3\vec{B})(2\vec{D}+\vec{F}) = 2\,\vec{A}\vec{D}+\vec{A}\vec{F}+6\vec{B}\vec{D}+3\vec{B}\vec{F}$$

$$= 2\vec{B}+\vec{C}+6\vec{C}+3\vec{A}$$

$$= 2\vec{B}+7\vec{C}+3A$$

(b)类和矢量： 同一个类 C_i 的全部群元（基矢）的和

$$\tilde{\vec{C}}_i = \sum_{R\in C_i} \vec{R}$$

2. 类和定理 （a） $\tilde{\vec{C}}_i\tilde{\vec{C}}_j = \sum_k c_{ijk}\tilde{\vec{C}}_k$

（b）若类 C_i，C_j，C_k 三个类在同一个不可约表示中的特征标为

χ_i, χ_j, χ_k， 则

$$h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} \cdot h_j \frac{\chi_i}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk} h_k \frac{\chi_k}{\chi_E}$$

证：令D_i为C_i 各元的表示矩阵之和，即

$$D_i = \sum_{R \in C_i} D(R)$$

$$D^{-1}(X) D_i D(X) = D_i$$

$$D_i D(X) = D(X) D_i, \forall X \in G$$

舒尔引理

$$D_i = \eta_i I_0 \quad 则 \quad trD_i = l_i \eta_i = \chi_E \eta_i$$

另一方面，从表达式直接开始 $D_i = \sum_{R\in C_i} D(R)$

$$trD_i = \sum_{R\in C_i} trD(R) = \sum_{R\in C_i} \chi(R) = h_{C_i}\chi(C_i) = h_i\chi_i$$

$$\chi_E\eta_i = h_i\chi_i \qquad \eta_i = h_i\frac{\chi_i}{\chi_E} \qquad (*)$$

表示矩阵与类矢量满足相同的表达式

$$D_i = \eta_i I_0 \qquad D_iD_j = \sum_k c_{ijk}D_k$$

$$\eta_i\eta_j = \sum_k c_{ijk}\eta_k$$

$$\xrightarrow{(*)} \quad \boxed{h_i\frac{\chi_i}{\chi_E}h_j\frac{\chi_j}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk}h_k\frac{\chi_k}{\chi_E}}$$

（c）类和法求特征标表

D_3群的三个类和矢量：

$$\vec{\tilde{C}}_1 = \vec{E}, \vec{\tilde{C}}_2 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}, \vec{\tilde{C}}_3 = \vec{D} + \vec{F}$$

$$\vec{\tilde{C}}_2 \vec{\tilde{C}}_2 = 3\vec{\tilde{C}}_1 + 3\vec{\tilde{C}}_3$$

$$\vec{\tilde{C}}_i \vec{\tilde{C}}_j = \sum_k c_{ijk} \vec{\tilde{C}}_k$$

$$c_{221} = 3, c_{223} = 3$$

$$\vec{\tilde{C}}_2 \vec{\tilde{C}}_3 = 2\vec{\tilde{C}}_2, \text{有} c_{232} = 2$$

$$\vec{\tilde{C}}_3 \vec{\tilde{C}}_2 = 2\vec{\tilde{C}}_2, \text{有} c_{322} = 2$$

$$\vec{\tilde{C}}_3 \vec{\tilde{C}}_3 = 2\vec{\tilde{C}}_1 + \vec{\tilde{C}}_3, \text{有} c_{331} = 2, c_{333} = 1$$

求D_3群的一维表示， 此时 $\chi_E = 1$

$$\tilde{\vec{C}}_3\tilde{\vec{C}}_3 = 2\tilde{\vec{C}}_1 + \tilde{\vec{C}}_3, \text{有} c_{331} = 2, c_{333} = 1$$

$$\boxed{h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} h_j \frac{\chi_j}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk} h_k \frac{\chi_k}{\chi_E}}$$

$$2\chi_3 \cdot 2\chi_3 = 2\cdot 1\cdot \chi_1 + 2\chi_3 = 2 + 2\chi_3$$

$$\chi_3 = 1, \qquad -\frac{1}{2}\ \text{（舍）}$$

不可能构成一维幺正表示

$$\tilde{\vec{C}}_2\tilde{\vec{C}}_2 = 3\tilde{\vec{C}}_1 + 3\tilde{\vec{C}}_3 \qquad c_{221} = 3, c_{223} = 3$$

$$3\chi_2 \cdot 3\chi_2 = 3\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot（\chi_3 = 1）= 9,$$

$$\chi_2 = 1, -1$$

两个一维表示

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	-1	1

求二维表示的特征标

课堂练习

三个二维表示的特征标表

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
二维	E^1	2	2	2
二维	E^2	2	-2	2
二维	E^3	2	0	-1

前两个二维表示的特征标，是前两个一维表示的两倍

$$E^1 = D^1 \oplus D^1,$$
$$E^2 = D^2 \oplus D^2$$

只有E^3是独立的二维表示

综合一维二维表示，可得

		C_1	$3C_2$	$2C_3$
一维	D^1	1	1	1
一维	D^2	1	-1	1
二维	D^3	2	0	-1

求特征标表，可以多种武器混合使用

Burnside定理的意义为：m_j维的表示中可有$m_j{}^2$个独立的变量，可承担独立的群函数的任务，但它的空间不会大于G的空间。

即：m_j维表示中线性独立（互相正交）的矢量个数有$m_j{}^2$个，∴所有表示的线性独立的矢量个数$\sum_j m_j^2$不会超过群空间的维数。

当$i=j, \mu=\nu, \rho=\lambda$ 时，$\frac{1}{g}\sum_{R\in G} D^i_{\mu\rho}(R)^* D^j_{\nu\lambda}(R)=\frac{1}{m_j}\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\lambda}$

变为：$\sum_{R\in G}\left|D^i_{\mu\rho}(R)\right|^2=\frac{g}{m_i}$

即每个矢量的长度都为$\sqrt{\frac{g}{m_i}}$

正三角形群 D_3 的不可约表示：

例

$$\begin{array}{cccccc} E & A & B & C & D & F \\ D_3\{E & \sigma & \sigma C_3^2 & \sigma C_3 & C_3^2 & C_3\} \end{array}$$

二维表示：

$$D^2(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ D^2(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ D^2(B)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$D^2(C)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},D^2(D)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},D^2(F)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

满足 $\sum_{R\in G}\chi(R)^*\chi(R)=g$ ，表示矩阵不可约。

这套表示所构成的矢量有：

$$\left.\begin{aligned}
\vec{P}_{11} &= \left(1,1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\\
\vec{P}_{12} &= \left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
\vec{P}_{21} &= \left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
\vec{P}_{22} &= \left(1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

这四个矢量长度均为

$$\sqrt{\frac{g}{m_j}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

它们相互正交。

这四个矢量是线性独立的，但也只有四个。

$D_3 : g = 6$，而现只有四个矢量，按Burnside定理，还应有两个矢量，即：$\{1,1,1,1,1,1\}$ 和$\{1,-1,-1,-1,1,1\}$

长度均为 $\sqrt{\frac{6}{1}} = \sqrt{6}$ ，并且同上面四个矢量也是正交的。

群表示的性质总结

1．定理：有限群表示为不可约的充要条件是 $\frac{1}{g}\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2 = 1$

证: 有$R\in G$，表示为$D(R)$

$$\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2 = \sum_{R\in G}\left[\sum_{j} a_j\chi^j(R)\right]\left[\sum_{j'} a_{j'}\chi^{j'}(R)^*\right] = \sum_{j}\sum_{j'} a_j a_{j'}\sum_{R\in G}\chi^j(R)\chi^{j'}(R)^*$$

$$= \sum_{jj'} a_j a_{j'} g\delta_{jj'} = \sum_{j} a_j^2 g = g(a_1^2 + a_2^2 + \cdots)$$

若$D(R)$不可约，则 $\sum_{R\in G}|\chi(R)|^2 = g$

2． $m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2 = g$ $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i^2 = g\right)$

(Burnside 定理) 共r套表示，m_i为第i套表示的维数。

3．不等价不可约表示的数目(r)等于群的共轭元素类的数目(c)

例1：Abel群的表示：（Abel群中每一个元素自成一类）

令：g为表示矩阵的个数，c为类的数目，r为不可约表示的独立套数。

对Abel群：$g=c=r$　　　又$\because m_1^2+m_2^2+\cdots+m_c^2=g$

因此，只有一种可能 $m_1=m_2=\cdots=m_c=1$

如$c_n\{R=C_n, R^2=C_n^2, R^3=C_n^3, \cdots, R^n=C_n^n=E\}$为Abel群

$$\chi(R^n)=\begin{cases}\chi(E)=1\\ trD(R^n)=tr[D(R)]^n=[\chi(R)]^n=1\end{cases}$$

$$\chi(R)=1^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{2\pi m}{n}}\quad, \ m=0,1,2,\cdots,n-1$$

写出3阶阿贝尔群的特征标表

	E	R	R^2
一维　D^1	1	1	1
一维　D^2	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i4\pi/3}$
一维　D^3	1	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$

$$\Rightarrow \quad \chi(R)=1^{\frac{1}{n}}=e^{i\frac{2\pi m}{n}}$$

三个一维表示

循环群的循环：

$\{E \quad R \quad R^2\}: R$

$\{E \quad R^2 \quad R^4\}: R^2$

$\{E \quad R^3 \quad R^6\}: R^3$

写出4阶阿贝尔群的特征标表

	E	R	R^2
一维 D^1	1	1	1
一维 D^2	1	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
一维 D^3	1	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

问：这是三阶循环群的特征标表吗？

No, not even a representation!

群的直（接乘）积

定义：设两个群g_a（阶为h_a）和g_b（阶为h_b ）只有单位元是公共的，它们之间元素之积可对易，即：$a_i \in g_a, b_j \in g_b$，有

$$a_i b_j = b_j a_i, (i = 1,2, \cdots h_a, j = 1,2, \cdots h_b)$$

那么按群G的乘法得到的$h_a h_b$个元素$\{a_i b_j\}$也构成一个群，称为g_a和g_b的直积群，记为：$g_a \otimes g_b$ ，g_a和g_b称为直积因子。

证：封闭性： $a_i b_j a_{i'} b_{j'} = a_i a_{i'} b_j b_{j'} = a_{i''} b_{j''}, \in g_a \otimes g_b$

逆元：$(a_i b_j)^{-1} = a_i^{-1} b_j^{-1} \in g_a \otimes g_b$

单位元： $E_a E_b = E \in g_a \otimes g_b$

这样 $g_a \otimes g_b = g_b \otimes g_a = G$ 构成群。

*直积群的不同直积因子（如a_i, b_j等）的元素是相互对易的，但同一个直积因子中的元素可不对易（如a_i, a_j等）。

*直积因子g_a和g_b都是直积群 $g_a \otimes g_b$ 的正规子群

对$b_l \in g_b$ 取其共轭元

$$(a_i b_j) b_l (a_i b_j)^{-1} = a_i (b_j b_l b_j^{-1}) a_i^{-1} = a_i b_k a_i^{-1}$$

$$= a_i a_i^{-1} b_k = b_k$$

令 $a_i b_j = x$则$x g_b x^{-1} = g_b$

$\therefore$ g_b是 $g_a \otimes g_b$ 的正规子群

同理，g_a也是$g_a \otimes g_b$ 的正规子群

表示的直积

矩阵的直积 (1) 定义 如果有两个矩阵α，β，其中，
α是$m \times n$ 的矩阵，β是$\mathrm{p} \times q$ 的矩阵,
γ是 $mp \times nq$ 的矩阵，矩阵元关系满足

$$\gamma_{ij,kl} = \alpha_{ik}\beta_{jl},$$

$$\gamma = \alpha \otimes \beta$$

γ 是两个矩阵 α，β的直积，记作

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} & \alpha_{12}\beta_{11} & \alpha_{12}\beta_{12} \\ \alpha_{11}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{22} & \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12} & \alpha_{22}\beta_{11} & \alpha_{22}\beta_{12} \\ \alpha_{21}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{22} & \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{22}\beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\boldsymbol{\beta} & \alpha_{12}\boldsymbol{\beta} \\ \alpha_{21}\boldsymbol{\beta} & \alpha_{22}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

问：当 m, n, p, q 任意取值，直积矩阵 的第 a 行第 b 列元素是？

$$a = (i-1) \times p + j, \qquad j \in [1, p]$$

$$\mathrm{b} = (k-1) \times q + l, \qquad l \in [1, p]$$

$$\gamma_{a,b} = \alpha_{ik}\beta_{jl},$$

$$(ij), (kl)$$

（2）定理

若$\gamma = \alpha \otimes \beta, \bar{\gamma} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}$,则有

$$(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = (\alpha\bar{\alpha} \otimes \beta\bar{\beta})$$

证明：取上式左边矩阵的一个矩阵元

$$[(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta})]_{il,kn} = \sum_{j,m} (\alpha \otimes \beta)_{il,jm} (\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta})_{jm,kn}$$

$$= \sum_{j,m} \alpha_{ij}\beta_{lm}\bar{\alpha}_{jk}\bar{\beta}_{mn} = \sum_{j,m} \alpha_{ij}\bar{\alpha}_{jk}\beta_{lm}\bar{\beta}_{mn}$$

$$= (\alpha\bar{\alpha})_{ik}(\beta\bar{\beta})_{ln} = [\alpha\bar{\alpha} \otimes \beta\bar{\beta}]_{il,kn}$$

得证$(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = (\alpha\bar{\alpha} \otimes \beta\bar{\beta})$

直积表示（1）定义　群G的两个表示 D_G^a 及D_G^b.
取这两个表示的直积，即

$D(A) = D^a(A) \otimes D^b(A), \forall A \in G$成立
得到一个新的矩阵的集合D_G, 其中
$D_G = D_G^a \otimes D_G^b$, 则有$D_G$也是群的一个表示，
称为直积表示

直积群的表示

(1)两个可对易群的表示的直积，是直积群的表示

$$G = G_a \otimes G_b$$
$$D = D_a \otimes D_b$$

(2)直积群表示的特征标，是可对易群表示的特征标的乘积

$$\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{G}^{\mathrm{a}}} \chi_{\mathrm{G}^{\mathrm{b}}}$$

$$C_{2h} = C_2 \otimes C_i$$

绕垂直轴转动π

$$C_2 = \{E, c_2\}, C_i = \{E, I\}$$

$$C_{2h} = \{E, c_2, I, \sigma_h\} \longrightarrow \text{水平镜面反射}$$

特征标表

C_2

	E	c_2
D^{a_1}	1	1
D^{a_2}	1	-1

C_i

	E	I
D^{b_1}	1	1
D^{b_2}	1	-1

C_{2h}群的特征标表： $\chi_{\mathrm{G}} = \chi_{\mathrm{G^a}}\chi_{\mathrm{G^b}}$

理解这种对应关系

	E	c_2	I	σ_h	
D^1	1	1	1	1	$D^{a_1} \otimes D^{b_1}$
D^2	1	1	-1	-1	$D^{a_1} \otimes D^{b_2}$
D^3	1	-1	1	-1	$D^{a_2} \otimes D^{b_1}$
D^4	1	-1	-1	1	$D^{a_2} \otimes D^{b_2}$

课后练习题10：

一个群的两个不等价不可约表示能有完全相同的特征标吗？

课后练习题15：

（1）为什么在特征标表中，
除了第一列（单位元的特征标）外，
没有哪一列全是正的；

（2）除了第一行（恒等表示）外，
没有哪一行全是正的。